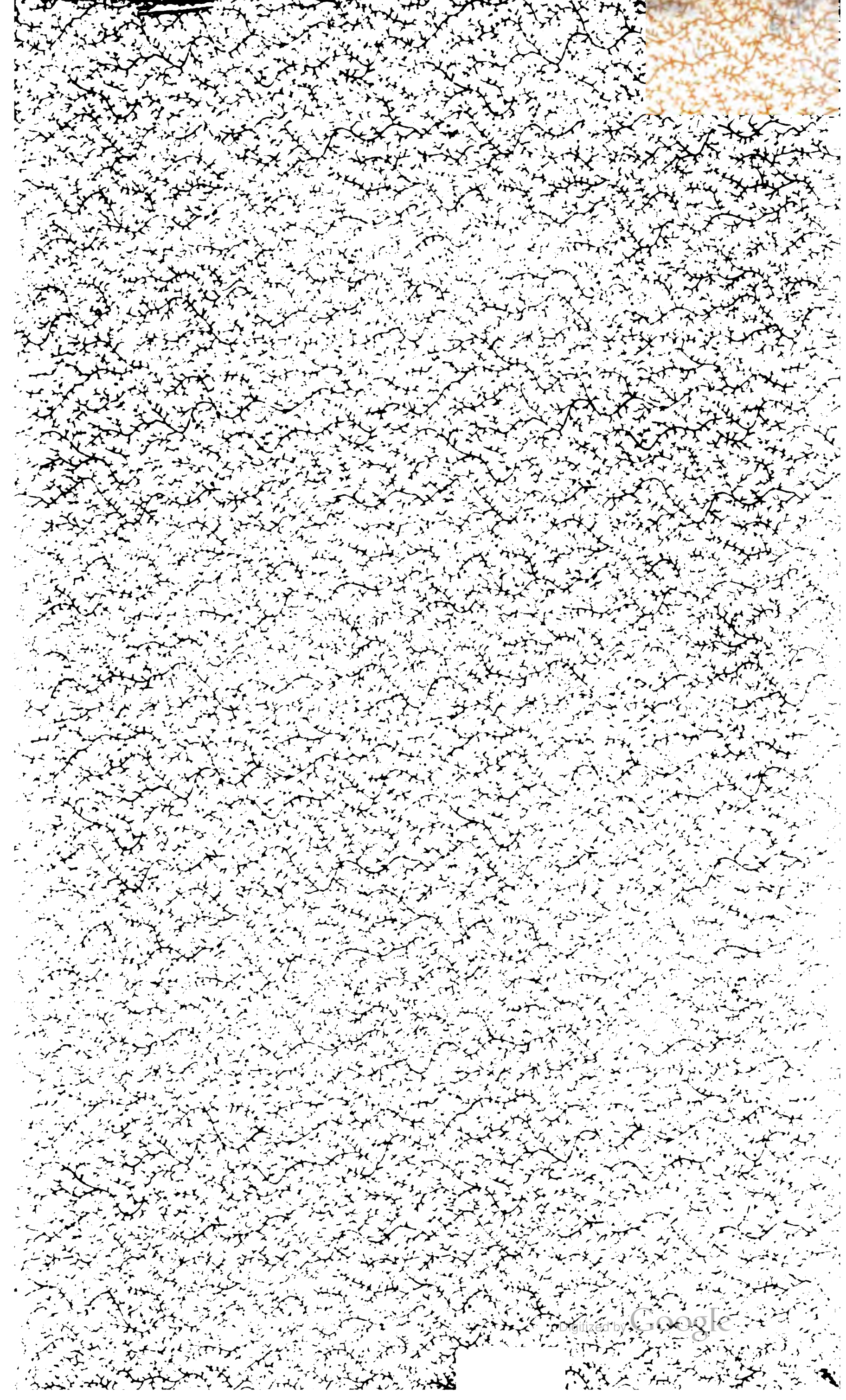






Leitfaden

für das

Rechnen in der Elementarschule

nach den

Grundsätzen einer heuristischen Methode.

Ein

methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht

von

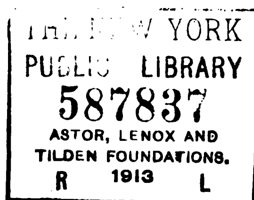
A. W. Grube.

Fünfte vermehrte und verbesserte Auflage.

(Mit Berücksichtigung der neuen Maaß- und Gewichtsordnung.)

Berlin, 1873.

Verlag von Theod. Chr. Fr. Enslin.
(Adolph Enslin.)



„Der Schüler soll vermittelst des Schulunterrichts nicht bloß anschauen und denken lernen, sondern zum Bewußtsein eines Zweckes anschauen, d. h. beobachten, und mit Bewußtsein des Zusammenhanges denken, d. h. begreifen. Unsere Meinung ist, daß die Kinder in unsern Schulen beides sehr wenig lernen."

Dr. Chr. Weiß.

Vorwort

zur ersten Auflage.

Obwohl unsere elementar-pädagogische Literatur, der man überhaupt keinen Mangel an Fruchtbarkeit vorwerfen kann, namentlich im Rechnen eine Ueberfülle von Schriften erzeugt hat, so möchte ein Büchlein, wie das hier dargebotene, gerade mit diesem vorhandenen Reichthume seine Erscheinung rechtfertigen können. Wir wollen uns sogleich näher erklären.

Pestalozzi hat uns wohl von der schlechten objektiven (der abstrakt-wissenschaftlichen) Methode im Elementarunterrichte befreit, und zu der naturgemäß-subjektiven (psychologischen) hinübergeführt; ob wir aber nicht, von der einen Seite uns abwendend, die Fahne der „Anschauung" mit etwas zu großer Heftigkeit nach der anderen Seite hinübergetragen haben, und einem neuen Feinde zugezogen sind? Ob wir nicht dem ewigen Geschrei nach „Anschaulichkeit" das eigentliche Anschauen allgemach verloren und statt des objektiven einen subjektiven Formalismus gewonnen haben? Wir brauchen diese Fragen hier nicht zu beantworten, da sie bereits von gewichtigeren und kompetenteren Stimmen laut und vernehmlich genug bejaht sind, da es Thatsache ist, daß wir uns mehr oder weniger in die einseitig-subjektive Methode verfahren haben. Wir wollen damit keineswegs den wirklichen vielseitigen Fortschritten in der methodischen Bearbeitung der einzelnen Lehrzweige, und dem Werthe der errungenen Virtuosität in der Methodik überhaupt zu nahe treten, aber zum Besten der Sache dürfen auch ihre Schattenseiten nicht verschwiegen werden, und — eben bei dem Virtuosenthum kommt in der Regel das Objekt schlecht weg. Kehren wir darum von dem etwas über das Ziel hinausgefahrenen Gange eine Strecke zurück, und fassen wir das Ding auch einmal von seiner anderen Seite an, so daß nicht bloß dem anschauenden Subjekte, sondern auch dem angeschauten Objekte sein Recht werde, und aus der gleichmäßigen Berücksichtigung beider eine konkret-objektive Methode zu Stande komme. Es hat sich ja besonders an dieser „reichen" Literatur des Rechnens gezeigt, wie das einseitige Streben nach Anschaulichkeit das arithmetische Objekt in eine Menge von Theilen und Theilchen zerlegt, daß über dieses anatomische

Methodisiren das Leben des Dinges selbst entflohen, so wie von Seiten des Geistes die freie Uebersicht in die selbstthätige Entwickelung des dargebotenen Stoffes erstickt ist. In der Einleitung, welche dem Lehrgange als Begründung desselben vorangestellt ist, wird man das eben ausgesprochene Urtheil motivirt finden. Ueber diese Einleitung aber ist hier noch ein Wort zu sagen. Man wird sie für den Elementarlehrer zu wissenschaftlich, zu schwer finden. Für den Anfänger ist sie aber auch nicht geschrieben — dieser mag sich an den rein praktischen Theil halten — sondern für den im Felde seiner Literatur wohlbewanderten, für eine tiefere psychologische Erörterung gereiften Elementarlehrer, so wie andrerseits für den Seminarlehrer und den Theoretiker vom Fach, welchen die Sache angeht, und der mit Recht, wenn ihm etwas Neues in der Praxis geboten wird, eine Aufzeigung des Prinzipes fordert. Aber auch hiervon abgesehen, so ist unsere feste Meinung, daß alle unsere praktischen Handbücher mit ihrem Stoffe auch jedesmal eine Dosis Theorie verabreichen sollten, damit die Breite der Praxis nicht gar zu breit, und indem sie auf einem Punkt zusammengefaßt, auch begriffen würde. Es ist zwar sehr viel von „Anschauen" und „anschaulichem Unterrichte" gesprochen, aber von dem wesentlichen psychologischen Prozesse der Anschauung sehr wenig gesagt worden, wie denn nach der anderen Seite hin bei Aufstellung einer Methode alle Grundsätze befolgt wurden, nur der eine nicht: Der Gegenstand ist zugleich seine Methode! Es ist also dieses einseitige Festhalten des subjektiven Standpunktes, welches die Menge der sogenannten Methoden erzeugt, und jenes endlose Experimentiren hervorgebracht hat, das um so freieren Spielraum findet, je weniger man von der Natur des Objektes Notiz nimmt, und je mehr man bei dem oberflächlichen „Anschaulich" stehen bleibt. Hätten manche Schriftsteller in der Elementar-Methodik sich etwas mehr Mühe gegeben, das Spezielle ihrer Praxis auf ein Allgemeines zurückzuführen, und aus einem Prinzip heraus ihre Lehrgänge zu konstruiren: sie würden uns das nicht als etwas „Neues, Eigenthümliches" als „Methode" angepriesen und durch den Druck veröffentlicht haben, was schon längst, wenn auch in etwas anderer Form, vorhanden war, was bloß subjektives Verfahren, nicht Methode, sondern Manier ist. Wo aber die Praxis nicht auf das Bewußtsein eines sie bedingenden, ihr Leben und Gestalt verleihenden (theoretischen) Grundes gebaut wird, da bleibt sie eine rohe Praxis, welche als bloß subjektiv durchaus keine allgemeinere objektive Geltung in Anspruch nehmen sollte. Man trete doch einmal näher an die täglich mehr wachsende Menge von Rechenbüchern heran, und zähle diejenigen, welche den Namen eines neuen und eigenthümlichen Buches verdienen, wie viel da herauskommen? Woher anders ist das aber zu erklären, als daraus, daß das Einzelne ohne sein Allgemeines hingestellt, seine Berechtigung und Nothwendigkeit im Ganzen des Unterrichts nicht nachgewiesen, kurz, daß der Lehrgang nicht begründet wird. Wie sollen aber die Elementarlehrer anders zur Selbständigkeit und freien Beherrschung ihres Stoffes gelangen, wenn sie nicht durch die von ihnen benutzten Handbücher selbst herangebildet, und von der Mannigfaltigkeit ihrer Thätigkeit zu

der Einheit des Begriffes hingeführt werden? Die Seminarbildung, wie sie es auch unter den obwaltenden Verhältnissen nicht anders vermag, kann eben nur die rohe Praxis geben, dem Streben des Individuums es überlassend, wie es sich in derselben zum Selbstbewußtsein heranbilde. Manche greifen dann wohl im Gefühl des unbefriedigten Bedürfnisses zu — einem Lehrbuche der Psychologie, was freilich meist ein fruchtloses Beginnen bleibt, weil ihnen hier angesonnen wird, sich aus ihrer gewohnten Anschauungswelt auf einmal in ein Gebiet reiner Abstraktion zu versetzen, ohne daß beide Sphären durch die nöthigen Mittelglieder verbunden werden. Wäre es nun da nicht ganz natur- und zweckgemäß, wenn man der auch für den Elementarlehrer nicht abzuweisenden Anforderung eines tieferen Eindringens sowohl in das Wesen des zu lehrenden Gegenstandes wie des zu belehrenden Subjektes dadurch begegnete, daß die Bücher, welche ihm die Lehrgänge an die Hand geben, zugleich die Psychologie dafür darreichten, und so die Erkenntniß des Allgemeinen in seiner Einheit mit dem besonderen Stoffe zu einer wahrhaft konkreten und fruchtbringenden machten? So hätte der Lehrer in einer allseitigen und eindringenden Präparation auf das einzelne Lehrobjekt zugleich das Material für sein allgemeineres theoretisches Studium, dessen er für seine Freiheit im Lehren unabweislich bedarf. Dies zur Rechtfertigung der Einleitung.

Ueber den Lehrgang selbst macht sich der Verfasser gleichfalls auf den Vorwurf gefaßt, daß er für die Meisten eine zu große Allseitigkeit voraussetze, und daß, weil diese fehle, eine Trennung und Sonderung der Operationen noch immer nothwendig sei. Es ist freilich bequemer, in dem schon breit und festgetretenen Gleise fortzuwandern, als einen neuen Weg einzuschlagen, der überall ein freies Umherschauen und selbstthätiges Rekognosziren des ganzen Terrains verlangt, weshalb Mancher den hier vorgeschlagenen Gang, eben seiner Eigenthümlichkeit wegen, ruhig auf sich beruhen lassen wird. Aber wir setzen seinen Vorzug gerade darin, daß er den Lehrer zur Selbstthätigkeit auffordert, und zur Freithätigkeit anleitet, dergestalt, daß dieser das Ganze von A bis Z sich selbst zu konstruiren im Stande ist, sobald er sich der zum Grunde liegenden Idee bemächtigt hat. Wir finden gerade in jener Theilung und Sonderung der Uebungen das Hinderniß einer freien Uebersicht und selbständigen Behandlung des Stoffes, und wissen aus Erfahrung, wie selbst gewandte und fähige Lehrer über die große Menge und Verschiedenheit der Uebungen in unsern sonst ganz trefflichen Anweisungen (wie die von Scholz und Diesterweg) Klage führen, da hier ein so weit ausgesponnenes Material geboten wird, wie es bei der in der Regel verstatteten Zeit durchaus nicht bewältigt werden kann*). Diese Zersplitterung des arithmetischen

*) O. Schulz sagt in der Anzeige der fünften Auflage des Scholzischen Rechenbuches (Brandenb. Schulblatt, 2. Heft 1842): „Was Referent daran aussetzen möchte, ist die große Ausführlichkeit, die gewiß manchen Lehrer abhält, das Ganze durchzuarbeiten und seinen Rechenunterricht danach einzurichten.

Inhalts ist aber eine nothwendige Folge der bloß subjektiven Methode.

Wir haben nun diese verlassen, und dem Objekte eine einfachere, lediglich durch seine eigene Natur bedingte Gliederung gegeben, dabei aber durch Zusammenfassen des Extensiven jede einzelne Stufe reicher und intensiv gehaltvoller gemacht. Nur so können wir der immer mehr zunehmenden, an jede Schule ohne Ausnahme herandringenden Masse des Wissens Herr werden, daß wir die Theile desselben zu möglichster Einfachheit organisiren, und durch Intensität im Einzelnen die Extensität des Vielen zu ersetzen streben. So haben wir — und es mag Vielen anfangs sonderbar vorkommen — das Speziesrechnen in ganzen und Bruchzahlen, das früher fast die ganze Elementarschulzeit in Anspruch nahm, auf zwei halbjährige Kurse reduzirt, dafür aber auch durch eine vorangegangene allseitige Uebung der Anschauungskraft und Entwickelung derselben zu freier Beobachtung ein Material gewonnen, das nun bloß nach seinen einzelnen Seiten hin auseinander gelegt zu werden braucht, und weil es im Ordnen nicht erst gewonnen wird, wie das früher geschah, eine verhältnißmäßig sehr kurze Zeit dafür in Anspruch nimmt. Es ist mit diesem Spezies-Rechnen etwa so, wie mit dem Klavierspielen. Wenn der Schüler nach erlangter Notenkenntniß und dem Spielen von einigen Vorübungen sogleich zu Handsachen übergeht, so kann er wohl 3 Jahre lang spielen, bevor er eine mittelmäßige Sonate rein und präzis vortragen lernt, während ein anderer, der $2\frac{1}{2}$ Jahr Kalkbrenner's Klavierschule durchgearbeitet hat, im letzten halben Jahre alles das, und bedeutend fertiger spielt, woran jener Jahrelang sich abmühte.

Mit dieser intensiven Bildung der Anschauung hängt die Bildung zur Sittlichkeit auf das Innigste zusammen. Nur aus der Vertiefung in das Lehrobjekt kann die Liebe zu demselben entstehen, und nur das, was der Mensch liebt, will er auch. Nur der Unterricht wirkt lebendig auf das Gemüth des Schülers, welcher mit dem Verstande zugleich den Willen erobert, und alle Anschauungsmethoden sind so lange „unpraktisch", als sie mit dem Anschauen nicht auch das Anschauenwollen erzeugen. Wir haben darum das Prinzip der Sittlichkeit als das allein Maaßgebende für die Erziehung wie für ihren wesentlichsten Theil, den Unterricht, an die Spitze unserer Entwickelung gestellt. Viele wissen bis zur Stunde nicht, was sie mit der Forderung, jedem Unterrichtsgegenstande solle ein religiöses Moment beiwohnen, eigentlich an-

Was unsern Schulen am meisten Noth thut, das ist ein Leitfaden, der auf zehn bis zwölf Bogen den Gang der Elementarübungen im Rechnen vollständig andeutet und dann die Grundsätze, an denen das angewandte Rechnen beruht, anschaulich an einzelnen Beispielen entwickelt und in einer solchen Allgemeinheit aufstellt, daß der Schüler von selbst einsieht, wie alle einzelnen Rechnungsarten zu behandeln sind."

Verf. freut sich, einen solchen Gewährsmann für das Prinzip seiner Schrift zu haben, wie er überhaupt hier dankbar des Interesses und Beifalls erwähnen muß, mit dem hochgeachtete Pädagogen, wie Hentschel, Weiß und Diesterweg, denen Verf. theilweis das Manuskript mittheilte, selbiges beehrten, und zur Herausgabe desselben ermunterten.

fangen sollen. So hat man denn die religiöse oder besser die sittliche Seite des Rechnens in allem Anderen gesucht, nur nicht im Rechnen selbst, und es ist gar nicht so lange her, daß man dem gefühlten Bedürfnisse abzuhelfen glaubte, indem man berechnen ließ, wie viel Kinder Israels durch's rothe Meer passirten, und wie viel Egypter elendiglich darin umkamen — oder wie viel ein Säufer alljährlich seinem Geldbeutel Schaden zufügt u. s. w. — um doch in das weltliche Rechnen etwas religiöse Salbung zu bringen. Hätte man mehr, als geschehen ist, das Prinzip der Sittlichkeit zum Maaßstab für die Konstruktion der einzelnen Methoden genommen, so würde ebensowohl der Gegenstand wie die Psychologie dabei gewonnen haben. Der abstrakte Grundsatz: Entwickele allseitig die geistige Kraft! oder: Bilde den Schüler zur Selbstthätigkeit! ist leere, hohle Form, und für die Entwickelung des Objektes ganz unfruchtbar. Man fragt da vergebens: Wie soll die Selbstthätigkeit entwickelt werden? Nach welchem Ziele hin und zu welchem Zwecke?

Was endlich den Titel unseres Büchleins betrifft, so haben wir ihn absichtlich als „Rechnen für die Elementarschule" gefaßt, einmal, weil der Begriff des „elementaren Rechnens" ein viel zu schwankender ist, zweitens um von vorn herein den Kreis fest zu bestimmen, in welchem wir uns bewegen wollen — nämlich die das Schulalter vom 6ten bis 10ten Jahre umfassende Elementar- oder Grundschule, welche sich ganz wesentlich von der Volks- wie von den niedern Klassen der Bürgerschule unterscheidet, obschon dieser Unterschied noch nicht überall äußerlich hervortritt. Es ist endlich einmal Zeit, daß die heillose Begriffsverwirrung in der Unterscheidung der verschiedenen Schulen ein Ende nehme, und daß auch die Praxis sich ein wenig dem akkommodire, was mit lobenswerthem Bemühen von mehreren unserer Pädagogen über diesen Punkt bereits auseinander gesetzt ist. Die oben gerügte Zersplissenheit des Stoffes in unseren Rechenbüchern ist mit eine Folge davon, daß sie für „Lehrer und Schüler, für Elementar- und Volksschulen, für Bürgerschulen und die unteren Klassen der Gymnasien, wie für Schullehrer-Bildungsanstalten", und wie die Anstalten sonst noch heißen mögen, gleich brauchbar sein wollen. Was aber der Elementarschüler absolvirt hat, das braucht der Bürgerschüler nicht mehr, der Volksschüler ist wieder ein anderes Subjekt als der Quintaner eines Gymnasiums, und der Lehrer vollends kann nicht aus seinem Lehrgange die Theorie des Addirens und Subtrahirens lernen sollen. Es muß darum auch hier die Schule in ihrem Gesammt-Organismus begriffen werden, damit jeder einzelne Theil als Organ des Ganzen sich bethätige, eins durch das andere gedeihe und reife. —

Damit Gott befohlen! Mögen diese Bogen einen lebendigen Impuls geben zur frischen Fortbildung unserer Methodik! Entwickelung ist ja überhaupt nur da, wo Gegensätze sich bilden. —

Berlin, den 12. August 1842.

Der Verfasser.

Vorwort
zur vierten Auflage.

Als mir der Herr Verleger meldete, daß die 3. Auflage dieses Werkchens vergriffen sei, kam mir der Gedanke, es einer gründlichen Durch- und Umarbeitung zu unterwerfen. Bei näherer Prüfung jedoch ergab sich alsbald, daß dieses nicht wohl thunlich, ja auch nicht einmal räthlich sei. Wollte ich die strenge Konsequenz des Lehrganges mildern, manche scharfe Ecken und Kanten abschleifen, das Ganze mehr mit der üblichen und anerkannten Methode des elementaren Rechnens in's Gleichgewicht setzen: so würde ich dem Büchlein seine Eigenthümlichkeit, seinen Charakter, sein Leben nehmen. Es hat eben einen oppositionellen Geist, der, wie ich mich dessen noch wohl erinnere, wie ein frischer scharfer Nordost hineinwehete in die lau und matt gewordene Luft der endlos sich ausbreitenden methodischen Handbücher der dreißiger und vierziger Jahre und durch den einschneidenden Gegensatz Veranlassung gab, daß man sich mehr zusammenfaßte und zur Aufstellung eines einfacheren Lehrganges entschloß. Ich glaube ohne Unbescheidenheit sagen zu dürfen, daß dieses Büchlein wenigstens mit dazu geholfen hat, daß man sich einzelne Zahlräume (von 1—10, 10—20, 20—100) bestimmter absteckte, und anstatt gleich in's Weite vorzuschreiten, diese erst gründlicher durcharbeitete; daß man ferner Uebungen, die früher weit auseinander gerissen waren, nun in der allseitigen Anschauung einer und derselben Zahl auf die einfachste und anschaulichste Weise vereinigte. Strebsame Lehrer und erfahrene Methodiker wie Dagott, Heuner, Schmidt, Scholz, Zähringer 2c. gingen, wenn auch selbstverständlich mit eigenthümlichen Abweichungen, auf den von mir aufgestellten Lehrgang ein, um methodisch sorgfältig und sauber ausgeführte Arbeiten wie die „Uebungsschule im bürgerlichen Rechnen" von H. Blancke (1. und 2. Heft) und die Rechenfibel von O. Mießler (1864 in 2. Auflage erschienen) geben Zeugniß, daß ich nicht bloß negative Kritik geübt habe.

Wer selber denken, mit eigenen Augen sehen lernen will, der muß vergleichen lernen, Gegensätze anschauen und eben deshalb Verschiedenes sehen und beobachten. An guten handlichen praktischen Rechenwerken, welche alle Extreme ausgeglichen und von entgegenstehenden Richtungen das Brauchbarste und Beste sich angeeignet haben, fehlt es uns nicht. So mag denn auch ein Werkchen, das wegen seines entschiedenen Gegensatzes zum Bestehenden zur Prüfung und selbständigen Beobachtung auffordert, allen geistig geweckten Elementarlehrern, die nicht blindlings ihren Führern folgen wollen, immer noch von Nutzen sein.

Es sind nun 22 Jahre verflossen, seitdem dieser Leitfaden an's Licht getreten ist. Das Büchlein war mein pädagogisches Erstlingswerk. Es erinnert mich und wohl auch manchen meiner Freunde an jene glückliche Zeit jugendkräftigen Strebens, wo man mit fröhlichem Muth steile und ungebahnte Pfade wählt und sie der bequemeren sicheren Fahrstraße vorzieht, weil sie die eigene Kraft mehr herausfordern und zum Bewußtsein bringen.

Hard bei Bregenz, Neujahr 1865.

A. W. Grube.

Vorwort

zur fünften Auflage.

Nun ist bereits mehr als ein Menschenalter verflossen, seitdem ich das Vorwort zur ersten Auflage dieses Werkchens geschrieben. Obwohl ich dasselbe in der Absicht und auch in der Hoffnung herausgab, daß es in der Lehrerwelt einige Beachtung finden und zur Umgestaltung der bisherigen Methodik des elementaren Rechnens das Seinige beitragen möchte: so wäre es doch vermessen gewesen, nur den Gedanken zu hegen, daß es sich auf so lange Zeit hin nicht nur behaupten, sondern in seiner Wirkung auch frisch erhalten würde. Und doch ist dieß der Fall! Nicht nur, daß der „Leitfaden" sich fort und fort der freundlichen Beachtung strebsamer Lehrer im großen deutschen Vaterlande erfreut — er hat sich auch neuerdings im fernen amerikanischen Westen und im fernen europäischen Nordosten Freunde erworben. Nach den Grundsätzen desselben entworfen und geordnet erschienen drei Aufgabensammlungen in russischer Sprache und neuerdings unternahm Hr. Theodor Ewald, Lehrer der Mathematik am 7ten Gymnasium in St. Petersburg, eine Uebersetzung des Büchleins in's Russische. Daß selbst jene Methodiker, welche gegen meine Methode polemisirten, nicht wenig davon benutzt haben, will ich gleichfalls hier nicht unerwähnt lassen.

Mein Lehrgang ist allerdings ein sehr scharfer und schroffer Gegensatz gegen das Hergebrachte und zur Geltung Gekommene gewesen und gerade darum hat er entschieden gewirkt. Ich habe auch in vorliegender Auflage nichts daran geändert, wohl aber viel altes Material über

Bord geworfen und das Ganze reicher ausgestattet: *mit Rücksicht auf die neue Maaß- und Gewichtsordnung.*

Diese hat auch in die Methodik des elementaren Rechnens neues Leben gebracht. Mag immerhin, wie jeder Umzug viel Unbequemes und Widerwärtiges hat, der Uebergang vom Alten, in das wir uns eingelebt hatten, zum Neuen, das uns an vielen Punkten wie ein Fremdes berührt, mit mancher Unbequemlichkeit und Mühe verbunden sein: die heranwachsende Jugend wird sich dasselbe schon assimiliren und bald der Vortheile des neuen Systems erfreuen. Ja, die Lehrer selber werden in ihrem Rechenunterricht, trotz augenblicklicher Schwierigkeiten, alsbald inne werden, wie viele Lichtseiten das Neue selbst in Bezug auf die Methodik hat und es wird sich auch hier der Satz Spinoza's bewähren: Ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum.

Wir müssen die Schüler so früh wie möglich mit den neuen Maaßen und Gewichten bekannt machen, damit sie so bald wie möglich in der neuen Ordnung der Dinge heimisch werden. Doch brauchen wir keineswegs Alles auf Ein Mal zu geben, sondern thun wohl daran, Eins nach dem Andern zu bringen. Da eine Vergleichung der alten Maaße mit den neuen für die nächsten Jahre nicht zu vermeiden ist, so machen wir aus der Noth eine Tugend und benutzen das Reduziren und Resolviren zu bildenden arithmetischen Uebungen — schon im Elementarunterricht; aber wiederum nicht voreilig und verwirrend, sondern da, wo das Verhältniß offen zu Tage liegt und der Schüler mit dem Neuen bereits vertraut geworden ist.

Die Behandlung der Decimalbrüche habe ich von der Stufe des elementaren Rechnens ausgeschlossen, auch hier dem Grundsatze folgend, die Schwierigkeiten nicht ohne Noth zu häufen und Einer Anschauung erst eine gewisse Zeit zu lassen, bevor wir zu einer andern übergehen. Vorerst werde der Schüler in den gemeinen Brüchen fest und sicher. Das Rechnen mit diesen gewährt eine so vortreffliche Uebung in arithmetischer Turnkraft, im Denken überhaupt, daß wir sie nicht dem Decimalbruchrechnen zu lieb verkürzen oder auch nur zu schnell in den Hintergrund drängen wollen. Das Rechnen mit Decimalen kann ohnehin schnell genug zur Fertigkeit gebracht werden, da es durch das metrische System an die Hand gegeben wird. Und gerade, weil es dem Mechanismus des Tafelrechnens Vorschub leistet und das Kopfrechnen zurückdrängt und fast überflüssig macht, wollen wir letzteres im Zahlraume von 1 bis 100 und auch von 100 bis 1000 zuvor tüchtig üben und für das Rechnen mit den gemeinen Brüchen einen soliden Grund legen.

Sollten einige von mir herangezogene Uebungen im Bruchrechnen für den Standpunkt mancher Schulen als zu schwer befunden werden, so mag man sie weglassen und sich an die leichteren halten. Uebrigens habe ich schon auf den ersten Stufen meines Lehrgangs der Fertigkeit, mit Brüchen zu operiren, so tüchtig vorgearbeitet, daß die so vorgebildeten Schüler auch anscheinend große Schwierigkeiten mit spielender Leichtigkeit überwinden werden, wenn es an die Brüche selber geht.

Indem mir die Bearbeitung vorliegender Auflage Gelegenheit bot, [illegible] wieder Umschau zu halten in der neuesten Rechenbücher-Literatur,

konnte ich nicht umhin, der Bemerkung Dr. Bartholomäi's (in seinem Referat im vorletzten Jahrgang des Päd. Jahresberichts) beizupflichten, daß es des Guten fast allzuviel sei und daß Mancher, der diese und jene kleine Variation in bekannten und geebneten Lehrgängen anbringt, alsbald auch seine „neue Methode" gedruckt sehen will. Dennoch sind bedeutende Fortschritte in der Behandlung des elementaren Rechnens nicht zu verkennen und selbst die Ueberfülle arithmetischer Schriften zeugt für das rege Interesse der Lehrer am Rechenunterricht und seiner methodischen Durchbildung.

Wir Deutsche sind nun einmal ein pädagogisches Volk, und daß wir vor Allem den Elementarunterricht als die Basis für alle weitere Geistesentwickelung pflegen: das ist ein Vorzug, den wir vor allen europäischen Nationen voraus haben und der einen integrirenden Bestandtheil unserer Größe bildet.

Bregenz, Neujahr 1873.

A. W. Grube.

Inhalt.

I. Einleitung.

1.

Von der sittlichen Bedeutung der Schule und des Unterrichts überhaupt.

Der Unterricht ergreift den erkennenden Geist, stellt diesem die Idee des Wahren, Guten und Schönen in den einzelnen Unterrichtsobjekten dar, und fordert das lernende Subjekt auf zur freien Gemeinschaft mit dem zu lernenden Gegenstande. Darin beruht der sittliche Prozeß des Lernens. Als ein sittlicher Prozeß bedarf er aber zu seiner Bethätigung auch der äußeren Darstellung des Leibes, in welchem sich der sittliche Geist wesentlich ausprägt, und das ist die Gemeinschaft. Nur so kann das Individuum über seine einzelne Subjektivität hinauskommen, daß es sich objektiv wird in der Menge von Individuen, und zwar wie dieselbe durch einen gemeinsamen sittlichen Zweck zur Einheit verbunden ist. Die durch den Zweck des Unterrichts organisirte Gemeinschaft nennen wir Schule. Der Eintritt des Kindes aus dem elterlichen Hause in eine Schule bildet eine Epoche in seinem Leben, einer zweiten Geburt zu vergleichen, denn es ist eine spezifisch verschiedene Atmosphäre, die nun das Kind empfängt. Die Familie pflanzt die Keime aller sittlichen Bildung durch das Band der Liebe, mit der sie das jugendliche Gemüth an Eltern und Geschwister knüpft; wenn die Gefühle der Ehrfurcht, des Vertrauens, der Liebe nicht schon hier eine freundliche Stätte finden, wo sie wurzeln und sich entfalten können, möchten die anderen sittlichen Kreise des späteren Lebens vergebens einwirken. In der Familie muß das sittliche Individuum erst als Individuum sich ausbilden und kräftigen, um seine Individualität als einen lebensfrischen Bestandtheil in die Gemeinschaft vieler Individuen auflösen zu können. Aber eben, weil hier der einzelne Mensch noch als solcher sich geltend macht, weil die Gemeinschaft des kindlichen und elterlichen Lebens noch die unmittelbare ist, in der beide gleichsam zu einem Individuum verschmelzen, die vermittelte oder selbstbewußte Einheit des subjektiven und objektiven sittlichen Geistes erst durch den entschiedenen Gegensatz beider zur Entwickelung gelangt: so muß das Kind in einen zweiten sittlichen Lebenskreis, worin ein objektiver Wille seinem Eigenwillen als unmittelbare Macht über diesen entgegentritt, und das ist die Schule. Diese ist nicht bloß ein wirksames, son-

dern ein nothwendiges Moment in der sittlichen Entwickelung des jungen Menschen. Kein Privatunterricht, auch der beste nicht, ist einen wenn auch nur mittelmäßigen Schulunterricht zu ersetzen im Stande. Die Eltern, welche diesen durch jenen ersetzen und dabei den Kindern eine rechte Wohlthat zu erweisen glauben, lassen eben hierin eine recht nachtheilige Lücke in der sittlichen Bildung derselben entstehen. Leider ist die rohe Ansicht vom Unterricht, als komme es dabei auf die Masse des gelernten Stoffes an, eine noch gar verbreitete.

Daß übrigens häusliches und Schulleben nicht in abstraktem Gegensatze aus einander zu halten seien, geht aus dem Gesagten genügend hervor. In dem Schulleben wird das Familienleben allerdings aufgehoben, insofern einerseits die Einseitigkeit des letzteren zum Besten der sittlichen Entwickelung negirt werden, andererseits wird es aber auch aufbewahrt, insofern es als ein lebendiges Moment in dem Schulleben fortwirken muß, wenn dieses nicht seines natürlichen Grundes, der nothwendigen sittlichen Basis, entbehren soll. Beide Lebenskreise sind konzentrisch, weil dieselbe sittliche Idee zum Mittelpunkt habend; dabei steht aber immer der wesentliche Unterschied beider fest, in dem sich das Familienleben zum Schulleben verhält wie das besondere zum allgemeinen, das Privat- zum Staatsleben. In der Schule erhebt sich der junge Mensch von seiner individuellen Beschränktheit und Einzelheit zum Gliede (Organe) eines Gesammt-Körpers, wo er sein partikuläres Selbst, wie Stand, Laune, körperliche und geistige Eigenheiten &c., daran giebt, um nicht bloß mehr für sich, sondern auch für das Andere zu leben. Als Glied an dem Leibe der Schul-Gemeinschaft kann er nur existiren, insofern er sein subjektives Leben zu dem objektiven des sittlichen Gemeinlebens macht, in dem Zwecke der Schule den seines eigenen Selbst findet.

Der objektive Geist der Gemeinschaft erweist seine absolute Macht über den in sie eintretenden Schüler durch dies unmittelbare Gefühl einer imposanten Gewalt, der gegenüber sein Ich als solches verschwindet, und die eigene Freiheit, zu der man ihn erziehen will, tritt ihm zunächst als zwingende Nothwendigkeit in dem Schulgesetze gegenüber. Dies ist aber nicht das abstrakte in Worte gefaßte Gesetz, jene hohlen Verordnungen, die als „Schulgesetze“ vorgelesen und äußerlich an den Schüler herangebracht werden, sondern es ist das in der Person des Lehrers konkret gewordene Gesetz, das so lebendig an das Gemüth des Kindes herantretend, den natürlichen Uebergang des privaten Familienlebens zu dem staatlichen Schulleben bildet. Die Person des Lehrers ist eben die Seele des Schulorganismus, d. h. der individuelle Mittelpunkt, an welchen die Schüler als Theile der Gemeinschaft sich anschließen, und erst dadurch zu Gliedern des ganzen Leibes werden, daß sie diesem sich unterordnen. Der Lehrer hat die Bestimmung, seine Schüler zu Einem lebendigen Ganzen (Organismus) zu beseelen, und sie in der Einheit Eines Leibes und Eines Geistes stetig zu erhalten. Darum ist denn die erste und hauptsächlichste Bedingung für die sittliche Wirksamkeit der Schule diese, daß der Lehrer den Zweck der Schulgemeinschaft selbst lebendig in sich trage, daß er selbst von dem sittlichen Geiste durchdrungen sei, und so fortwährend den sittlichen Prozeß

der Hingabe des Subjektes an das Objekt seinen Schülern vorlebe. Es ist erstaunlich, welche Macht eine sittlich-kräftige Persönlichkeit durch ihre bloße Gegenwart auf junge unverdorbene Gemüther ausübt. Wenn schon die momentane Gemüthsstimmung des Lehrers unmittelbar auf die Schüler übergeht und hier sich abspiegelt, so ist dies um so mehr der Fall mit seiner stetig fortwirkenden sittlichen Stimmung, dem allen Worten und Handlungen sein Gepräge aufdrückenden Charakter. Ohne Liebe und Ehrfurcht gegen die Person des Lehrers bleibt das Lernen, dieser eigentlich sittliche Akt des Schülers, unlebendig und unwirksam. Das Lernen nun oder die Hingabe des unterrichteten Subjekts an das Unterrichts-Objekt ist der Geist der Schule, das Lebensprinzip derselben, der Grund, aus welchem und der Zweck, zu welchem diese ihr Dasein hat, für den der ganze Organismus der Schul-Gemeinschaft da ist, und worin das Wesen derselben beruht. Die Gemeinschaft für sich allein, die wir zunächst als zwingende äußere Macht erkannten, und die dem Schüler anfangs als das starre Gesetz der Nothwendigkeit entgegentritt, kommt in dem Akte des Lernens erst zu ihrer Wahrheit, indem hier die äußere Nothwendigkeit zu einer inneren, das Sollen zum Wollen (Liebe zum Unterrichtsgegenstande), das drückende Gefühl der Abhängigkeit zum freudigen Bewußtsein der Freiheit erhoben wird. Ebenso wäre die Liebe des Schülers zu dem Lehrer ohne die sittliche Lernthätigkeit eine bloß abstrakte: jene gewinnt erst durch diese ihren Inhalt und ihr wahres Leben. Ist der Unterricht rechter Art, so führt er zur Einheit des Erkennenden und Erkannten, und das ist wesentlich sittliches Leben; wie dasselbe in seiner Betheiligung in nothwendigem Zusammenhange mit der Schulgemeinschaft stehe und das Wesen der Schule nur aus der Sittlichkeit heraus zu erkennen sei, haben wir oben gezeigt.

Gehen wir nun, um die Art und Weise, wie das Unterrichts-Objekt mit dem lernenden Subjekt zu vermitteln sei, bestimmter in's Auge zu fassen, näher auf den Entwickelungsprozeß des erkennenden Geistes ein, so treten uns die bekannten drei Momente entgegen, die wir als Anschauen, Vorstellen und Begreifen (reines Denken) bezeichnen, mit ihrer gemeinschaftlichen Basis des Gefühls. In dem Gefühle ist der Geist noch in seiner rohen unvermittelten und darum unbewußten Einheit mit seinem Gegenstande; Fühlendes und Gefühltes, Subjekt und Objekt sind unmittelbar Eins, darum weiß eben noch keins von dem andern: der Gegensatz des Bewußtseins und seines Gegenstandes ist nur erst an sich, noch nicht für das Bewußtsein gesetzt. Damit dies geschehe, bedarf es eines besonderen Aktes von Seiten des Willens, den wir Aufmerksamkeit nennen. Mit der Aufmerksamkeit beginnt die intellektuelle Entwickelung, indem die unmittelbare Einheit des Subjekts und Objekts, wie sie im Gefühle Statt hat, aufgehoben und für die vermittelte freie Einheit des Denkens aufgeschlossen wird. Das aufmerkende Subjekt erhält nun den entäußerten Inhalt seines Gefühls zum Objekt, indem es ihn anschaut. Zwar schaut der Geist auch im Gefühl bereits an, indem er sich seines Zustandes dabei bewußt wird, aber dieser subjektive Zustand und das Bewußtwerden desselben (das Fühlen) ist eben Eins und dasselbe, er empfindet noch bloß, d. h. er

findet das Andere von ihm (das Objekt) in sich, und bildet die Außenwelt in sich hinein. Im Anschauen aber ist der umgekehrte Prozeß: der Geist bildet sich (den Inhalt seiner Empfindung) in die Außenwelt hinaus, indem er seine eigene innere Thätigkeit als ein von ihm Verschiedenes, ihm Gegenüberstehendes sich vorhält und es an-schaut*). So erblicken wir hier den Zusammenhang der beiden Grundfaktoren des menschlichen Geistes-Lebens: des Einwirkens von Außen und des Rückwirkens nach Außen, des Reizes und des Triebes oder der Rezeptivität und Spontaneität. Der Reiz des Objektes auf das Subjekt ist die Empfindung, die spontane Rückwirkung des Subjektes zum Objekte hin die Aufmerksamkeit und das Produkt beider Faktoren die Anschauung. — Obwohl nun aber in der Anschauung der Geist aus seiner unmittelbaren Einheit mit dem Gegenstande heraus ist, so ist doch noch in der That die gleiche Unmittelbarkeit vorhanden, nur auf der anderen Seite, nämlich dem Objekte zugewandt. Wie im Gefühl der Gegenstand ganz in der Empfindung aufgeht, so geht umgekehrt in der Anschauung der Geist ganz in seinem Gegenstande auf, versenkt sich in das ihm Gegenüberstehende so, daß er sich noch nicht als dasselbe hat und weiß. Darum verhält er sich denn auch noch abhängig und unfrei zu dem Dinge, denn frei ist er nur dann, wenn er in seinem Objekte sich selber hat, in dem Andern bei sich ist. In der Anschauung hat der Geist bloß das Objekt, nicht sich als Subjekt. Indem er nun im Anschauen die Thätigkeit der Anschauung auf sich bezieht, zu sich gleichsam zurückwendet oder reflektirt, damit aber seine Anschauung (als Objekt) als der eigenen Thätigkeit sich bewußt wird, so stellt er sich den Gegenstand vor, nicht mehr als etwas außer ihm Seiendes, als räumliche und zeitliche Existenz, sondern in ihm selbst, als in das Zeitleben der Seele übergegangen, darum auch mit einem geistigeren (obwohl noch halbsinnlichen) Körper bekleidet, das ist das Wort.

Da es uns hier nicht darum zu thun ist, den psychologischen Hergang dieser Entwickelung in's Detail zu verfolgen, sondern nur auf die sittliche Seite dieses Prozesses, nämlich auf die Willensakte dabei, hinzuweisen, so machen wir überall nur auf das Wesentlichste, das eigentliche punctum saliens aufmersam. Wie wir dieses für die Anschauung in der Aufmerksamkeit erkannten, so hat es sich nun als Reflexion für die Vorstellung gezeigt.

In der Reflexion trennt sich das Bewußtsein von seinem Gegenstande, da es vorher ganz von diesem eingenommen, darein versenkt war. Es gehört eine Spannung der Kraft, ein kräftiger Anstoß des Willens

*) „Anschauen" ist ein herrliches Wort. Es drückt im Schauen die subjektive Thätigkeit aus, allein nicht bloß als ein Sehen, wie das Auge des Thieres in der sinnlichen Aeußerlichkeit befangen ist, sondern als eine Vertiefung in die Sache. Die Präposition „an" aber bezeichnet, daß das Schauen die Sache erst zur wirklichen Objektivität mache. Da nun die Funktion des Gesichtssinns den Gegensatz des Sub- und Objektiven am klarsten enthält, so ist klar, wie die Terminologie dieser Sphäre des Geistes von Ausdrücken wimmelt, die dem Sehen entnommen sind, wie Klarheit, Bild 2c. Rosenkranz, Lehre [illegible] subjektiven Geist.

dazu, um den Geist aus dieser unmittelbaren Einheit mit seinem Gegenstande zu befreien, und die Richtung auf sich zu geben. Die Reflexion ist eine Selbstbefreiung des Geistes, ein Losreißen von dem äußeren Eindrucke — wie die Aufmerksamkeit in ähnlicher Weise ein Losreißen von der Unmittelbarkeit des eigenen Zustandes oder des inneren Eindruckes ist. Indem der Geist auf die Anschauung als auf sein Produkt reflektirt, sich in dem Momente des Anschauens als den Anschauenden erfaßt, weiß er sich auch als *Macht* über das Objekt, das er nun nach Gefallen vorstellen und fallen lassen kann, und an dessen räumliche Gegenwart er nicht mehr gebunden ist.

Obwohl er nun vermittelst der Reflexion den Gegenstand als *sein Produkt* sich vorstellt, so bleibt dieser doch immer der „Gegenstand", das Andere von ihm, darum ihm noch Fremdes, das eben, als mit der ganzen Sinnlichkeit des Anschauens behaftet, das noch Ungeistige ist. Der Geist kann aber nur das wahrhaft erkennen, von dem nur *wissen*, das von ihm gleicher, also geistiger Natur — daß Er selbst ist. Wenn das Wissen *von* der Thätigkeit unseres Geistes nicht ursprünglich diese Thätigkeit selbst wäre, so wäre auch kein „Selbstbewußtsein", diese von der Sprache hier selbst treffend bezeichnete Einheit von Denken und Sein, möglich. In der Vorstellung ist nun zwar die Unmittelbarkeit des Anschauens aufgehoben, aber die Unmittelbarkeit des Wissens, worin der Geist als der selbstbewußte mit seinem Gegenstande Eins ist, noch nicht gewonnen. Dazu gehört denn, daß der Geist sich im Momente des Vorstellens erfasse, sich als den Vorstellenden von dem vorgestellten Objekte (der Vorstellung) unterscheide oder von der Vorstellung *abstrahire*, um sie nun als sein eigenes Produkt, als sein Ich selbst zu haben. So wird ihm das Ding sein *Gedanke*, das Ding und das Denken fällt in Einem Selbstbewußtsein zusammen, und das ist die höchste, weil vermittelte Einheit des Subjekts und Objekts im Gebiete des *reinen Denkens*. Weil aber mit der Handlung des Vorstellens das Produkt derselben, nämlich das vorgestellte Bild, immer zugleich mit entsteht, so bedarf es, um beides zu trennen, und die reine Thätigkeit in abstracto festzuhalten, der Energie des Willens; das Gelingen dieser Abstraktion hängt lediglich von der dem Geiste inwohnenden Freiheit ab, aus dem unreflektirten Zustande des Anschauens und dem reflektirten Erkennen des Vorstellens sich zu „befreien", und so haben wir die Freiheit als den tiefsten Grund des Selbstbewußtseins aufgezeigt. Diese Selbstbefreiung des Geistes schreitet, wie gezeigt, stufenweis von der Aufmerksamkeit durch die Reflexion zur Abstraktion fort, um zum Ziele des freien Erkennens, nämlich *in dem Andern bei sich zu sein*, sich als das Subjekt zugleich als das Objekt im Denken zu haben, zu gelangen.

Man fasse aber diese Entwickelungsstufen des Anschauens, Vorstellens und Denkens nicht als abgegrenzte, geschiedene und in der Zeit aufeinanderfolgende Thätigkeiten, sondern eben als Entwickelungs-Momente des erkennenden Geistes. Ohne das vorstellende (verständige) Denken, d. h. ohne Unterscheidung des Ichs von seinem Gegenstande, wäre gar kein (bewußtes) Anschauen möglich, denn ich weiß nur so viel vo[illegible] schauung, als ich in Begriffe fassen kann. Hinwiederum ist [illegible]



gar nicht ohne Anschauen möglich, denn es ist bloß die Thätigkeit des Anschauens als solche (in abstracto) festgehalten. Ebenso ist mit dem Gesagten der Ansicht gewehrt, als verhalte sich der Geist im Anschauen wesentlich rezeptiv und im Vorstellen wesentlich produktiv. Es hat sich ergeben:

Faktoren		
Bestimmtsein (Rezeptivität).	Selbstbestimmen (Spontaneität).	Produkt-Entwickelungsmoment.
Gefühl	Aufmerken	Anschauen
Anschauung	Reflektiren	Vorstellen
Vorstellung	Abstrahiren	Denken;

d. h. es ist in allen Geistesfunktionen dasselbe Wechselverhältniß des Einwirkens von Außen und des Rückwirkens nach Außen, oder der Geist ist auf jedem Punkte seiner Entwickelung der sittlich-freie, sich in aller seiner Thätigkeit selbst festhaltend und in jedem Gegenstande derselben bei sich seiend. Die sittliche Unfreiheit besteht ja in nichts Anderem, als in dem Nichtansichhalten, in dem unreflektirten Handeln, in dem Nichtabstrahirenkönnen von dem äußeren (sinnlichen) Eindrucke, in dem Hingegebensein an die Macht der Sinnenwelt.

2.

Von der sittlichen Bedeutung des Elementarunterrichts und des elementaren Rechnens insbesondere.

Nach den sub 1. skizzirten Momenten in der Entwickelung des erkennenden Geistes muß auch die Schule als Gesammt-Anstalt für die Entwickelung der Intelligenz sich gliedern. Insofern sie das Gefühl zur Anschauung erhebt, ist sie Elementar- oder Grundschule, die Anschauung zur Vorstellung (dem verständigen Erkennen) entwickelnd, ist sie Volks- oder niedere Bürgerschule, die Vorstellung zum Denken (wissenschaftlichen Erkennen) fortführend, und zwar nach der idealen (durch die antiken Sprachen) oder nach der realen Seite hin (moderne Sprachen und Naturwissenschaft als Hauptbildungsmittel), Gelehrten- (lateinisches) oder Real- (deutsches) Gymnasium, und endlich im reinen Denken, in der Wissenschaft als solcher, sich bewegend, die Universität.

Wie die Anschauung die Grundlage für die gesammte Erkenntnißentwickelung bildet, so ist die Elementarschule die Grundschule für alle übrige Unterrichtsanstalten; wie hier zugleich die ideale und reale Seite der Dinge noch in ungeschiedener Einheit beisammen ist, so fällt auch in der Elementarschule der Unterschied des theoretischen und praktischen, oder des Gelehrten- und Bürgerstandes zusammen. Somit ist sie die gemeinsame Bildungsanstalt für alle Stände und die gemeinsame Vorbereitungsschule für alle Schulen. Weil aber die Periode der Anschauung vorzugsweise in den Zeitraum vom 6ten bis 10ten Jahre des Kindes-Alters fällt, so ist damit auch die Elementarschulzeit bestimmt, und mit dem Ablauf derselben liefert die Elementarschule ihre Zöglinge entweder an die Volksschule, oder an eins der beiden Gymnasien ab.

Der Elementarunterricht erfaßt also seine Schüler auf dem Standpunkte der Anschauung. Wenn wir oben das (reine) Denken als das Ziel und Ende der Erkenntnißentwickelung bezeichneten, so ist nun darauf hinzuweisen, daß es ebensowohl der Anfang derselben, d. h. daß es wesentlich schon in der Anschauung mitgesetzt sei, denn wäre es nicht schon im Anfange der intellektuellen Entwickelung da, so wäre es auch nicht ihr Ende.

Jede empirische Anschauung, sobald sie der Geist frei aus sich wiederholt und vorstellt, wird zu einem Gemein- (allgemeinen) Bilde oder Schema, welches er nun an alle ähnliche Anschauungen hält, um sie damit zu messen. Je mehr nun der Geist bei seinem Anschauen und Vorstellen auf sich, als den Anschauenden und Vorstellenden, reflektirt, und von allem Beiwerk der sinnlichen Wahrnehmung als dem Unwesentlichen abstrahirt, kommt er zum Begriff des Dinges. Für das Anschauen aber heißt das so viel, als: er bezieht das Mannigfaltige der Anschauung auf die Einheit seiner Thätigkeit des Anschauens, er „begreift" es unter jenem Gemeinbilde oder Schema, das ihm somit zur Regel für sein Anschauen, d. i. zu der in allen ähnlichen Fällen wieder so einzurichtenden Thätigkeit wird. Weil aber in der Anschauung der Begriff und der Gegenstand unmittelbar zusammenfällt, ein Bewußtsein des letzteren aber nur möglich ist, indem der Geist beides auseinanderhält, so muß er für ein bewußtes Anschauen den Begriff von der Anschauung (als Objekt) trennen, und diese Trennung in der Vereinigung geschieht im Urtheil. Urtheile ich z. B. „der Baum blüht", so fällt beides, der Baum und das Blühen, in der Anschauung des „blühenden Baumes" zusammen; indem ich aber diese Anschauung als mein Produkt anerkenne, zwischen meiner Thätigkeit und dem angeschauten Objekte gleichsam theile, so urtheile ich: „der Baum blüht". Es muß also überall dieser Seitenblick auf meine Thätigkeit die Anschauung begleiten, der anschauende Geist muß sich stets von seinem Produkte unterscheiden, um zum Bewußtsein seiner Anschauung zu gelangen. Ohne Urtheil also bliebe die Anschauung eine unverstandene, und ginge für den Geist spurlos vorüber, weil er sie nicht als seine Thätigkeit (im Begriffe) festzuhalten vermöchte. Das Urtheilen besteht aber in dem Reflektiren des Geistes auf sein Anschauen, und somit ist die Reflexion der integrirende Bestandtheil des Anschauens. Mit dem Hinwenden des Geistes auf sich selber ist es aber noch nicht gethan, um eine intensiv-fortwirkende Anschauung zu gewinnen, muß derselbe auch sich in der reinen Thätigkeit seines Anschauens zu fassen und festzuhalten wissen, um allen störend eindringenden Stoff fern zu halten, von Allem, was nicht der Inhalt seiner Thätigkeit ist, zu abstrahiren. In dem innigen, lebendigen Anschauen muß ebensowohl die Reflexion wie die Abstraktion sich bereits wirksam erweisen, und wo dieses nicht geschieht, da wird später das eigentlich reflektirende und abstrakte Denken nie das rechte sein können; ist es aber der Fall, dann ist auch das Anschauen nicht ein bloßes Anschauen mehr, sondern ein Beobachten, d. h. ein Anschauen nach einem Schema, ein Anschauen mit dem Begriffe, oder mit der Einheit in der Mannigfaltigkeit.

Da nun diese Einheit, wie wir sahen, nichts ist als die Einheit

der eigenen Thätigkeit des Geistes als solche, worin der Geist sich selbst erfaßt: so ist eben freies Anschauen und Beobachten eins. Der anschauende Geist denkt, indem er beobachtet, und nur Beobachtetes ist er zu begreifen im Stande. — Dieses Hinwenden des Anschauens auf das Eine, und das Wegsehen von allem Andern, also das Beobachten, muß der Schüler erst lernen, und das ist der formelle Zweck des Elementarunterrichts. Das Aufmerken, wie das Reflektiren und Abstrahiren, soll nicht bloß eine momentane Thätigkeit der Intelligenz sein, sondern muß von ihrer ersten Entwickelung an eine kontinuirliche Richtung derselben, der Schüler muß dazu gewöhnt werden — sein Erkennen muß mit dem Willen verschmelzen. Wo das Lernen nicht ein Ergebniß des Lernen-Wollens ist, da ist es keine wirkliche Thätigkeit, denn eine solche ist nur als Resultat eines Willensaktes denkbar. Der wahre Elementar-Unterricht ist darum eine Anleitung zum Anschauen-Wollen, nur so ist der Geist in der Anschauung der freie, sich selbst bestimmende, und der ganze, d. i. sittliche Mensch im Anschauen thätig. Das Aufmerken und Abstrahiren sind die Elementar-Tugenden des Schülers; wo diese fehlen, sieht er wohl das eine Objekt, aber er sieht von dem andern nicht ab, beobachtet darum keins, und — denkt nichts beim Anschauen. Dann aber kann dies nicht hineindringen in den Mittelpunkt des geistigen Lebens und zu einem Momente desselben werden, das aber als empfundenes Eigenthum auch für alle fernere Entwickelung lebendig fortwirkt; — die Anschauung verbleicht zu unklarer Erinnerung, und das Wort dafür wird leerer Schall; es kann wohl mit dem Gedächtnisse festgehalten werden, aber es ist nicht zur Lebenssubstanz des Geistes geworden, also „todt an ihm selber". Dieses Anschauen mit der ganzen Theilnahme des sittlichen Menschen nennt ein geachteter Pädagog*) sehr bezeichnend ein Lernen mit dem Gemüthe, als der substantiellen Mitte und Basis des geistigen Lebens.

Die Entwickelung des Anschauens nach der beschriebenen formellen Seite hin könnte man füglich die Logik des Anschauens nennen.

Sehen wir uns nun nach dem Stoffe um, den die Elementarschule ihren Zöglingen bietet, um zu erfahren, welches Objekt hier die Logik des Anschauens vorzugsweise zu vertreten habe. Die der Anschauung des Kindes geöffneten Kreise sind das der Familie adhärirende Menschenleben und das im Horizonte des Kindes erscheinende Naturleben. Beide Sphären bieten die Elemente dar für die drei der Erkennt-

*) Dr. Ch. Weiß, in dem 2ten Theile seiner „Erfahrungen und Rathschläge aus dem Leben eines Schulfreundes." (Auch unter dem Titel: „Zur Fundamental- und Methodenlehre für ein einfacheres Lehrsystem in den Volksschulen unserer Zeit", Halle, Schwetschke u. S. 1839.) Ein Werk, was am entschiedensten unter den uns bisher bekannt gewordenen den Elementarunterricht von seiner sittlichen Seite faßt, und durch seine klare psychologische Begründung wie durch eine gereifte praktische Erfahrung gleich ausgezeichnet ist, und von keinem Elementarlehrer ungelesen bleiben sollte. Auch das Brandenburger Schulblatt arbeitet in rühmlichster Weise auf dieses Ziel hin, das für den Elementarunterricht, wie er bis dato wirklich ist, freilich noch ein sehr fernliegendes Ideal zu sein scheint.

niß geöffneten Reiche: das des göttlichen (absoluten), das des freien Menschen-Geistes, und das der Naturnothwendigkeit. — Der göttliche Geist kann vorerst nur geschichtlich erkannt werden, und zwar nur in solchen Geschichten, wie sie dem naivkindlichen Gottesbewußtsein entsprechen, also an das Familienleben sich knüpfen. Hier bilden denn die biblischen Geschichten, namentlich des alten Testaments, den bewährten Stoff, worin das in dem jugendlichen Gemüthe angeregte Gefühl des Höchsten seinen entsprechenden Ausdruck für die Anschauung findet.

Die Natur bietet in den Grundanschauungen (eben denjenigen, welche an die nächste Heimath sich knüpfen) der physischen und politischen Geographie, die aber als Elemente der später daraus hervorgehenden Naturbeschreibung, Geographie und Geschichte planmäßig zur „Weltkunde" zusammenzufassen sind, — das entsprechende Material, um in den Schulen ein Weltbewußtsein heranzubilden.

Für die Erkenntniß des menschlichen Geistes, also für die Entwickelung des Selbstbewußtseins als solches dient nun die **Sprache**, in deren Entwickelung die des eigenen Bewußtseins unmittelbar gesetzt ist, wie denn auch jedes Lehrobjekt mit dem Bewußtsein der gegenständlichen Welt auch das der inneren, geistigen Welt immer mit entwickelt, darum auch jeder Unterrichtsgegenstand das Material für den Sprachunterricht bietet. Von einem besondern Sprachunterrichte kann aber in der Elementarschule noch nicht die Rede sein, weil da überhaupt erst das Material gewonnen werden soll, welches die genannten beiden Unterrichtsobjekte darbieten. Für den anschauenden Geist ist der Sprachunterricht nichts anderes als Sprachübung, und das logische Element des Sprachunterrichtes, die Grammatik, muß darum wegfallen. —

Sehen wir nun den biblischen Geschichtsunterricht und den weltkundlichen näher an, so leuchtet ein, wie sie das Material für die formelle Ausbildung der Anschauung durchaus nicht zu bieten im Stande sind.

Von den biblischen Geschichten kann namentlich nicht eine strenge und stetige Bildung der Aufmerksamkeit erwartet werden. Hier, wie im ganzen Religionsunterrichte, wo das Wort des Lehrers die feinsten und zartesten Saiten des Gemüths berührt, wo das angeregte Gefühl ganz seinem Drange überlassen bleiben und frei sich entfalten soll: hier muß auch jedes unsanfte Eingreifen des regelnden Verstandes, jede harte Berührung und zwingende Einwirkung von außen her von der Lernthätigkeit des Schülers ferngehalten werden. Ebenso kann hier von einer Reflexion auf die eigene Thätigkeit gar keine Rede sein, weil das Gefühl als solches reflexionslos ist. In ähnlicher Weise muß auch in der Weltkunde die Reflexion des Kindes auf sich wegfallen, wenn eine rechte Unmittelbarkeit der Anschauung erzeugt werden soll. Hier soll der Schüler gerade aus sich herausgehen und mit lebendiger Theilnahme sich in das Objekt versenken, nicht auf seinen eigenen Geist, sondern auf dessen Gegenstand soll er merken. Obwohl nun auf diesem Gebiete die Aufmerksamkeit in steter Anregung erhalten wird durch das Neue und Mannigfaltige des Stoffes, so gibt doch allerdings gerade diese Mannigfaltigkeit der in dem ersten Jugendalter so mächtigen Zerstreuung vielfache Nahrung, so daß es der äußeren Zucht bedarf, um den zerstreuten Sinn zu sam-

meln, da die Einheit des Gegenstandes nicht zwingen kann, weil sie überhaupt nicht da ist. Die Weltkunde wie der Religionsunterricht in der Elementarschule vermag der Anschauung nur einzelne, abgetrennte Stücke zu bieten, und läßt also auch für das begreifende Anschauen (Beobachten) eine fühlbare Lücke. So fehlt also für die postulirte Logik des Anschauens ein drittes Lehrobjekt, das da einerseits den Geist zur Reflexion auf sich anleitete, in der Aufmerksamkeit auf seine Thätigkeit ihn stetig erhielte, so daß jede Unaufmerksamkeit dem Schüler selbst augenblicklich sich fühlbar machte, andererseits einen flüssigen, kontinuirlich sich entwickelnden Stoff darböte, der überall von der Mannigfaltigkeit des Gegebenen zur inneren Einheit des Begriffes hinführte, wo jeder Fehler im Zusammenfassen sogleich auffiele, jedes Austreten aus der zusammenhängenden Kette sogleich sich rächte, dabei die innere Anschauung systematisch geübt würde — welcher andere Lehrgegenstand könnte das sein, als die Mathematik? und zwar für den Elementarschüler auch der elementarste Theil dieser Wissenschaft, die niedere Arithmetik? Diese genießt den doppelten Vorzug, daß sie einmal die Zahl-Größe, also ein Abstraktes, Unsinnliches, zu ihrem Inhalte hat, dann aber auch zugleich diesen Inhalt in seiner Verbindung mit dem einzelnen Falle, an Gegenständen des täglichen Lebens aufweist, die abstrakte Zahl-Größe als konkrete Zahl mit der Anschauung des Schülers vermittelt, und den arithmetischen Stoff als „praktisches Rechnen" entwickelt. So hätten wir denn das Rechnen als das dritte wesentliche Lehrobjekt der Elementarschule und zwar in seiner Nothwendigkeit als Logik des Anschauens erkannt*).

Wie Raum und Zeit als das Allgemeine allen einzelnen Anschauungen zum Grunde liegen, so muß auch die Erkenntniß des Allgemeinen (die logische oder philosophische Seite des Unterrichts) sich nothwendig auf Anschauung der allgemeinen Raum- und Zeitgröße — Maaß und Zahl — gründen, denn indem Raum und Zeit die wesentliche Form, d. i. das allgemeine Gesetz in seiner Anschauung selber sind, so lassen sie auch die klarsten und bestimmtesten Begriffe zu, als welche unmittelbar aus der Anschauung der Sinnenwelt hervorgehen. Darum ist hier allein das Abstrakte zu suchen, welches dem Stadium der Anschauung entspricht. So sehen wir auch historisch den Anfang des menschlichen Denkens in der Mathematik, und die mathematische Erkenntniß als Vorschule der philosophischen: wie die Entwickelung der Menschheit im Ganzen, so die Entwickelung des Individuums im Einzelnen. Darum würde der, welcher die Stufe der Arithmetik überspringen wollte — wenn wir auch von ihrer Nothwendigkeit für das bürgerliche Leben ganz absehen — alsbald die gewaltige Lücke empfinden, wenn er an die Wissenschaften der Sprache, Geschichte, Moral rc. heran träte: es würde ihm mit dem Maaßstabe des äußeren Lebens auch der des inneren, mit der richtigen

*) Der selige Dinter spricht sich in einem (in den Jahnschen Jahrb. S. 328 mitgetheilten) Briefe an einen Freund in Vevay über das angedeutete Verhältniß der Hauptgegenstände des Elementar-Unterrichts also aus: „Der Handwerker muß im Gebiete dessen, was sein kann, durch die Religion, im Gebiete dessen, was sein muß, durch die Arithmetik, im Gebiete dessen, was gewesen ist, durch die biblische Geschichte denken lernen."

Auffassung der Zeitgrößen in der Körperwelt auch die des Zeitlebens des Menschengeistes abgehen*).

Obwohl der elementarste, so ist das praktische Rechnen doch ein Theil der Mathematik, und hat als solcher auch Antheil an dem Leben und Weben des Ganzen. Werfen wir nun noch einen kurzen Blick auf dieses, so erscheint hier die Methode als dasjenige, was die Mathematik zu einem so ausgezeichneten und für jeden höheren wissenschaftlichen Unterricht unentbehrlichen Unterrichtsgegenstand macht. Die Methode keiner anderen Wissenschaft kann sich mit der mathematischen messen; diese ist die systematische schlechthin, welche ihren Stoff mit absoluter Nothwendigkeit entwickelt und in der vollkommensten Einheit ihrer Theile festhält, daher sie auch jedem einzelnen Satze in der großen Kette den Stempel der unmittelbarsten Gewißheit (Evidenz) aufdrückt. Dies kann die Methode aber nur vermöge ihres Inhalts leisten, welcher ein rein abstrakter oder vielmehr die abstrakte Thätigkeit des vorstellenden Geistes selber ist. Es ist hier der Geist sich selbst der Stoff, weshalb er über denselben auch mit unbeschränkter Freiheit gebietet. In der Mathematik fällt das Denken und Ding unmittelbar zusammen, und darin liegt eben ihr großer, zu allen Zeiten anerkannter Werth und Vorzug, daß sie in strengster Kontinuität ihres Stoffes den Geist zur Einheit in seiner Thätigkeit führt, was wir oben als „das in dem Gegenstande bei sich Sein, das Sichselbstfesthalten des Geistes und Abstrahiren von allem ihm Fremden" bezeichnet haben.

Wie nun die eigentliche Mathematik die Vermittlerin ist zwischen dem vorstellenden und reinen Denken, so ist das Rechnen der Elementar- und Volksschule die Vermittelung des anschauenden mit dem vorstellenden Denken. Indem das elementare Rechnen das mit der eigentlichen Arithmetik gemein hat, daß ihm die abstrakte Zahl zum Grunde liegt; seinen praktischen Stoff aber auf dieses Allgemeine zurückführen muß; so zwingt es den Schüler zur Abstraktion von der empirischen Anschauung und zur Reflexion auf sich, — und weil jener arithmetische Stoff als rein abstrakter einer systematischen Entwickelung nicht bloß fähig ist, sondern auch bedarf, erfordert er eine stetige Aufmerksamkeit für seine Entwickelung**) — aus welchen Thätigkeiten dann als

*) „Gestalt und Zahl liegen so recht in der Mitte unsers ursprünglichen Gesichtskreises. Die Grundanfänge des Messens und Rechnens sind die ersten, fast nicht auszulassenden Vorübungen, welche auch der schwächste Verstand sich selber schafft. Hier ist nichts, was sich der Sprache entzöge rc. — hier an der einen und gleichen Stelle, wo auch das Bildungsmittel für die Anschauung liegen muß, hat man zu suchen, was sonst nirgends zu finden ist: den Faden für einen frühen Kinderunterricht, der so beschaffen sei, daß er sowohl sich als aller anderen Unterweisung eine Autorität schaffe, auf deren Geheiß die Zerstreuung entweiche, die Aufmerksamkeit komme und beharre." Herbart, ABC der Anschauung, 2te Aufl. S. 26 ff. Beiläufig gesagt, ein Buch, aus welchem die Elementarlehrer Vieles lernen könnten, sowohl für den Rechen- und Formenlehrunterricht, als auch für einen naturgemäß zu begründenden geographischen Unterricht.

**) Man kann es in jeder Rechenstunde beobachten, falls sie sonst gut ertheilt wird, wie in keinem andern Gegenstande die Aufmerksamkeit und das Ab-

nothwendiges Resultat sich die Beobachtung oder das Zusammenfassen der konkreten Mannigfaltigkeit des Anschauungsmaterials zur abstrakten Einheit des Denkens (der reinen Thätigkeit im Anschauen) ergiebt. — Hierin liegt nun freilich zugleich die große Schwierigkeit für die Methode des elementaren Rechnens. So sehr auch dessen arithmetischer Inhalt für eine systematisch-fortschreitende Entwickelung sich eignet, so sehr widerstrebt eine solche der Partikularität der nur auf Einzelnes, Nebeneinanderliegendes gerichteten Anschauung, wie sie das „praktische" Rechnen erheischt, das noch dazu die Bestimmung hat, ein regelrechtes Zifferrechnen als Mittel für den späteren Rechenunterricht zur Fertigkeit zu bringen. Weil so einerseits der Stoff des elementaren Rechnens ein äußerst flüssiger, andrerseits wieder ein eben so starrer ist, so zeigt uns die Methodik in diesem Objekte ein so endloses Experimentiren, eine solche Ueberfülle von methodischen Anweisungen, Leitfäden und Lehrgängen, wie es in keinem anderen Unterrichtsgegenstande der Fall ist. Allerdings ist auch gerade die Methode beim Rechnen die Hauptsache, und der sittliche Einfluß desselben hängt vorzugsweise von seiner Methode ab, weil es eben die formelle Seite des Anschauens zu vertreten hat — ganz so, wie der pädagogische Werth der Mathematik in ihrer Methode beruht.

3.

Von der Methode des elementaren Rechnens.*)

Wie bereits darauf hingewiesen, tritt uns in unserm Lehrobjekte einerseits das Subjekt als der anschauende Geist, andererseits das Objekt als die konkret-abstrakte Zahlgröße entgegen. Die Methode hat diesen Gegensatz zur organischen Einheit zu verbinden; wie ihr dies gelang, lehrt die Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts. Wir können a priori annehmen, daß, so lange jene Einheit nicht gefunden wurde, auch einer der zwei Faktoren, entweder das Subjekt oder das Objekt, überwiegend, und darum einseitig von der Methodik festgehalten sei. Das mag zunächst eine kurze Uebersicht darthun.

Als Begründer unserer ganzen Elementar-Methodik, besonders aber einer bildenden Methode des elementarischen Rechnens, ist bekanntlich Pestalozzi zu betrachten. Es ergiebt sich also für unsern Gegenstand ein Zeitraum vor Pestalozzi, seine Zeit und die neuesten Reformen seiner Schule.

Den ersten Zeitraum könnte man füglich den der einseitigen Objektivität nennen. Es ist bekanntlich der, wo man dem Schüler das Rechnen als eine abstrakte, in sich abgeschlossene Wissenschaft vorführte, auf das Subjekt gar keine, auf das Objekt allein Rücksicht nahm. Man

---

strahiren von dem Aeußeren so hervortritt, wie hier namentlich im Kopfrechnen. Es ist als arbeitete der ganze Körper mit, der lebhaftere Schüler wehrt mit Händen und Füßen jeden störenden Eindruck von sich ab, und sein ganzes Wesen ist in Unruhe, sobald die Kette seiner Thätigkeit unterbrochen ist.

*) Der Hauptsache nach bereits mitgetheilt im Brandenburger Schulbl., Januarheft 1840.

hatte es hier eigentlich nur mit der Ziffer, als dem entsprechenden Zeichen für die abstrakte Zahl, und mit der abstrakt-wissenschaftlichen Operation zu thun; der Stoff war abgetheilt nicht nach dem Entwickelungsgesetze des kindlichen Geistes, vom Einzelnen zum Allgemeinen aufsteigend, sondern wie er dem reflektirenden Verstande des entwickelten wissenschaftlichen Geistes als fertig vorlag. Die reine und angewandte (benannte) Zahl standen in ausschließendem Gegensatze einander sehr oft gegenüber. Diese Periode, wo man das Rechnen damit begann: Es giebt fünf Spezies, nämlich Numeriren, Addiren &c., dann das Numeriren definirte und bis in die Billionen exerzirte, so überall mit Definitionen und Regeln begann und von Summanden und Summen sprach, ehe noch irgend einmal summirt war &c. — diese Periode ist im Ganzen wohl eine gewesene, wenn auch hier und da gegenwärtig immer noch herrschend.

Den zweiten Zeitraum möchten wir den der einseitigen Subjektivität nennen. Es ist der Zeitraum der gänzlichen Umgestaltung, des eigentlichen Auflebens des Elementarunterrichts — denn in der ersten Periode kann von einem solchen kaum die Rede sein —, in dem man für die Methode den entgegengesetzten Weg einschlug: zunächst und vor Allem das Subjekt in's Auge zu fassen, und nur dem psychologischen Gesetze gemäß das Unterrichtsobjekt dem Schüler vorzuführen. Damit machte man den bedeutenden Fortschritt vom Zeichen zur Sache. Wenn früher die Ziffer Zweck und Ziel des ganzen Rechnens bildete, so jetzt die Zahl, die in ihrer ganzen Bedeutung für die formelle Bildung des Subjekts erfaßt und ausgebeutet wurde. Die Pestalozzische Schule hat namentlich für das Rechnen das hohe Verdienst, dasselbe dem Tode eines abstrakten Formalismus entrissen und auf die konkrete Grundlage lebendiger Anschauung gepflanzt zu haben.

Wie aber der Uebergang von einem Extrem fast nothwendig in das andere führt, so wurde nun auch hier über dem Subjekt das Objekt vernachlässigt. Man hatte zwar den kindlichen Geist in seiner eigenthümlichen Natur ergriffen, aber den Rechenstoff in seinen abstrakten und für den sich entwickelnden Geist todten Gegensätzen gelassen; darum mußte die Entwickelung des subjektiven Geistes eine abstrakte, weil nicht mit dem Unterrichtsobjekte zu lebendiger Einheit verwachsene (konkrete) Bildung erzeugen. Indem man jetzt nur dem Prinzip des psychologischen Gesetzes huldigte, verblieb der Stoff in seiner, aus dem reflektirenden Verstande entsprungenen Zersplissenheit. Die formelle Bildung trat in ausschließenden Gegensatz zu der materiellen; die materielle Seite des Rechnens wurde nicht in ihrer selbstständigen Berechtigung, als Zweck, und zwar in ihrer Einheit mit dem formellen Zweck anerkannt, sondern nur als ein Mittel für denselben betrachtet, und darum auch nur insoweit gewürdigt, als sie eben Mittel war. Man trennte „reines" und „angewandtes" Rechnen von einander, um „die Lückenlosigkeit in dem Entwickelungsgange des kindlichen Geistes" nicht zu gefährden, und suchte von demselben Gesichtspunkte aus die Anwendungsfälle in ihrer Gesondertheit von der reinen Zahl systematisch zu ordnen.

Wenn die erste Periode nur von einem „Zifferrechnen" wußte, so

wollte die zweite nur das „Kopfrechnen" anerkennen; das erstere wurde als ein Appendix hintenangestellt und in einem besondern Kursus behandelt. Diese Gegensätze, so nothwendig und heilsam sie auch waren, um in den todten Mechanismus des Rechnens wieder eine lebendige Seele zu bringen, und der handwerksmäßig mit Ziffern arbeitenden Hand wieder den die Zahl anschauenden „Kopf" zuzugesellen — sind doch immer Extreme. So läßt Kamerau seinen Lehrgang des Rechnens in vier abgesonderte Rubriken zerfallen:

a) Kopfrechnen ohne Zehnerordnung,
b) Kopfrechnen mit Zehnerordnung,
c) Zifferrechnen,
d) Angewandtes Rechnen.

So ist in dem rühmlichst bekannten Werke von Tillich*) der rein formelle Zweck durchaus vorherrschend, und wenn auch bereits der wissenschaftliche Gesichtspunkt, die Rücksicht auf eine abgerundete Darstellung des Objekts festgehalten wird, doch keine Durchbringung des formellen Prinzips mit dem materiellen. So läßt Krancke (der übrigens unter den Männern, die mit eigentlicher Vertiefung in die Sache einem bildenden Rechenunterrichte die Bahn brachen, in der ersten Reihe steht), den ganzen ersten Kursus**) im Zahlraum von 1 bis 1000 ohne allen Gebrauch der Ziffer und statt dieser mit Punkten rechnen, bei denen für die höheren Einheiten die symbolische Darstellung mit Dreiecken, Quadraten ꝛc. zu den anschaulichen hinzutritt. Wenn nun auch das Zweckgemäße dieses Verfahrens, als eines heilsamen Gegensatzes zu dem Extrem der ersten Periode, und eines für die gründliche Erkenntniß der Zahlenverhältnisse schätzbaren Förderungsmittels, an sich nicht zu verkennen ist, so mußte es doch bald unnütz werden, sobald ein gründlicher, bis in's Kleinste durchgebildeter Rechengang erreicht war. Eine ruhige Ansicht des Gegenstandes überzeugte bald, daß im Wesen des elementarischen Rechnens gar kein Unterschied Statt findet zwischen einem Kopf- und Zifferrechnen, sondern daß derselbe nur da eintritt, wo man Behufs der Fertigkeit in der Operation (bei größeren Zahlen und verwickelteren) Aufgaben die Ziffer anwendet, und damit der aus unserm Zahlensystem hervorgehenden Art, die Zahl zu schreiben, sammt gewissen daran sich knüpfenden Regeln zu folgen genöthigt ist, welche aber die Gesetze des Objekts als Wissenschaft gar nicht berühren†).

---

*) Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik, oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann von Ernst Tillich, Leipzig 1806. Zweite mit einem praktischen Theile vermehrte Auflage von M. Lindner, 1821.

**) „Rechenfibel" oder „Leitfaden und Exempelbuch für den Elementarunterricht im Rechnen." Fünfte Auflage. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung, 1847. Dazu die: „Anleitung zu einem zweckmäßigen Unterrichte im Rechnen, vorzüglich zum Elementarunterricht ꝛc."; ferner: „Hilfsbuch beim Unterricht im Kopfrechnen ꝛc." Zweite Auflage. Ebendas.

†) Sehr gut ist dieser Punkt auseinander gesetzt in einem lesenswerthen Aufsatze von Zehlicke: „Ueber den Elementarunterricht im Rechnen", Mecklenburger Schulblatt 1834 und 1836.

Mit der Ausgleichung der erwähnten Gegensätze hat die dritte Periode begonnen. Dieser liegt es ob — denn sie ist noch nicht abgeschlossen — die Rechte des Objekts, die in der zweiten über der einseitigen Bildung des Subjekts verkannt waren, geltend zu machen, die subjektive Methode mit der objektiven zu durchdringen, eine organisch-entwickelnde Methode für das Rechnen zu gewinnen. Das Rechenwerk von Scholz*), als der erste Versuch einer methodisch-vollständigen Anweisung, jene Gegensätze zu vermitteln, fand darum allgemeinen und wohlverdienten Beifall. Unter der Menge nachher erschienener ist als die bewährteste Schrift die von Diesterweg und Heuser**) zu nennen.

In beiden Werken ist die Verbindung des Kopf- und Zifferrechnens, des reinen und angewandten Rechnens, des materiellen und formellen Zweckes angestrebt, aber die organische Durchdringung dieser beiden Gesichtspunkte in der Weise, daß die Entwickelung und der Fortschritt des Stoffes zusammenfällt mit der Entwickelung des kindlichen Geistes, daß für das Objekt wie für das Subjekt jede folgende Stufe eine mit Nothwendigkeit aus der vorhergehenden sich entfaltende, und ebenso immer die nothwendige Entwickelungsbasis für die ihr folgende darstellt, ist — nach unserer Ansicht — in beiden nicht erreicht.

Die Nothwendigkeit einer strengen Aufeinanderfolge des Rechenstoffes hat bereits in der zweiten Periode der wackere Tillich geltend gemacht, und dadurch den Pestalozzischen Geist wesentlich weiter gebildet, daß er neben dem subjektiven Gesichtspunkte auch den objektiven aufstellt, überall vom Leichteren zum Schwereren, vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren lückenlos fortschreitet, und die Uebungen dergestalt ordnet, daß die eine die andere vorbereitet und aus sich hervorgehen läßt: aber diese Anordnung des Rechenstoffes bleibt die der abgeschlossenen abstrakten Wissenschaft, es ist der Lehrer, welcher auf jeder Stufe

*) „Faßliche Anweisung zum gründlichen Kopf- und Zifferrechnen", 3 Theile. Halle bei Anton. (Vierte Auflage.) Dazu 3 Hefte: „Aufgaben für das Zifferrechnen" und 3 Hefte: „Aufgaben für das Kopfrechnen". Ebendas. — Jetzt ist die sechste Auflage unter dem Titel: „Praktischer Rechenlehrer ꝛc." erschienen, und eine größere Berücksichtigung des mathematischen Elements darin zur besonderen Empfehlung des Werkes in seinem neuesten Gewande zu rühmen. — Ein sehr dankenswerther Beitrag zur Vereinfachung des elementaren Rechnens ist vom Seminardirektor Goltzsch geliefert worden: „Der Rechenunterricht in der Volksschule von E. T. Goltzsch u. F. W. Theel. 1854." — Um meinen Leitfaden noch praktischer und mehr mundrecht zu machen, sind erschienen: „Uebungen im Rechnen für Elementarschulen von J. Schmidt, Lehrer in Nürnberg. (Erstes Heft, Zahlenraum von 1—100)". So sehr ich das Streben des Verf. anerkenne, muß ich doch dem beipflichten, was der Recensent im Südd. Schulboten (1855, 8. H.) darüber bemerkt. Ich dächte, auch mein „Lehrgang" wäre klar und einfach genug, um seinem Wesen nach leicht gefaßt zu werden. Nicht das Breitere, sondern das Tiefere habe ich gesucht, und wollte dazu anregen.

**) „Methodisches Handbuch für den Gesammt-Unterricht im Rechnen", Elberfeld bei Büschler 1829 und 31, jetzt in 5. Aufl., Gütersloh bei Bertelsmann, 1853. Dazu: Praktisches Rechenbuch ꝛc." Von Denselben. Ebendas.

dem Schüler *voranschreitet und diesen auffordert, ihm nachzufolgen.* Dieser Mangel ist aber in den angeführten Werken der dritten Periode noch nicht beseitigt. Die Anweisung von Scholz gibt uns ein komplizirtes Gebäude von einzelnen Uebungen, die aus der subjektiven Methodik hervorgegangen keineswegs in der Verbindung stehen, wie sie die den *Fortschritt ihrer Entwickelung selber in sich tragende Zahl* fordert. Diese Masse und Zersplitterung der Uebungen läßt den Schüler nicht zur *wahren Freithätigkeit*, weil nicht zum Bewußtsein der Einheit in seiner Thätigkeit, wie sie aus der Einheit des Stoffes unmittelbar resultirt, kommen. Die einzelnen Stufen liegen alle *neben=* statt *ineinander*; es ist nicht der *Gegenstand*, der in seiner Entwickelung den Schüler von einer Stufe zur anderen emporhebt, sondern die den Gegenstand zurecht schneidende und reckende Methodik*). Bei Diesterweg und Heuser ist zwar mehr Durchsicht, mehr Streben zur Einheit des Mannigfaltigen, aber diese ist wiederum nicht die Einheit des Objektes, sondern die des Verstandes, dem die Gegenstände untergeordnet und unterworfen sind für den psychologischen (subjektiven) Zweck des Unterrichts. So bleibt das Subjekt die überwiegende Seite, das Objekt aber ein dem abstrakten Schema unterworfenes — *Regelrechnen.* So lange nämlich die vier Spezies für die reine Zahl, die „Rechnungsarten" für die angewandte Zahl das Prinzip bilden, nach welchem man das ganze Rechnen anordnet: setzt man ein a priori Aufgestelltes, eine Operation als Regel oder Schema an die Spitze, und läßt danach nun sämmtliche dahin einschlagende Uebungen vornehmen. „Jetzt ist das Addiren an der Reihe", und nun wird Alles, was von Exempeln gegeben wird, addirt — „jetzt ist die Proportionslehre absolvirt", und nun werden die Rechnungsarten nach dem Schema des Proportionsansatzes ausgeführt. Wenn auch keine in Worte gefaßte Regeln hier mehr an die Spitze gestellt werden, so muthet man doch dem Schüler zu, nach einem allgemeinen Plane zu operiren, von dem er nicht absieht, wie er aus dem Einzelnen seiner Thätigkeit hervorgeht. So wäre z. B. der naturgemäße Weg der, daß der Schüler erst aus einer Reihe von Aufgaben den Proportionsansatz, als eine bequeme Regel zur Berechnung ähnlicher Aufgaben, abstrahirte, und nicht umgekehrt, daß er vorher das abstrakte Schema zur Berechnung der nachfolgenden Aufgaben bekäme. Ein selbstständiges zusammenhängendes Folgern muß da wegfallen, weil alle Aufgaben nach *einem Musterbeispiele* gelöst werden. Auf diesen Uebelstand wurde dann auch von mehreren Seiten aufmerksam gemacht; die erste praktische

---

*) Im Gefühl der Einseitigkeit seines größeren Werkes hat Scholz zwei Büchlein „Zahlendenkübungen" herausgegeben, worin er ganz meinen Ideen folgt, ohne derselben mit Einem Worte Erwähnung zu thun. Im Bestreben, Alles zu erschöpfen, hat er den Stoff allzubreit getreten, so daß die Uebersichtlichkeit schwindet. Eine neuere Schrift von Dagott (die Zahlen von 1—100, 2te Aufl., Braunsberg 1855) hat mit praktischem Sinn meine Methode für Ungeübte handrecht zu machen gesucht, und sei ihres Bemühens hier anerkennend Erwähnung gethan. Ein sehr handliches, brauchbares Werkchen, das den Geist meiner Methode in sich aufgenommen hat und dabei sich doch selbstständig und mit methodischer Gewandtheit bewegt, ist das Rechenbuch für die Unterklassen der Volksschule von Alb. Hansters (Essen, 1870 in 3ter Aufl.).

Ausführung aber jener Idee, die sogenannten Rechnungsarten von der Regel der Proportion für das elementare Rechnen loszumachen, gab Hentschel in seinen „Hundert Aufgaben“ *).

Hiermit war zugleich das Rechnen von seinem subjektiven Unterschiede als Kopf- und Zifferrechnen zu dem höheren und wesentlichen Gegensatze von Regel- und Denkrechnen hingetrieben, so daß für das Denkrechnen wie für das Kopfrechnen der Gegensatz von Kopf- und Zifferrechnen als rein untergeordnet sich darstellt. Die Sache ist, wie sie Hentschel in der Einleitung **) des angeführten Werkes kurz bezeichnet, diese:

Rechnen

Denkrechnen	Regelrechnen
Kopfrechnen, Zifferrechnen.	Kopfrechnen, Zifferrechnen.

Unser bisheriges Rechnen ist aber, wenn auch von der subjektiven Seite, d. h. für den lernenden Schüler betrachtet, zu der psychologisch-richtigen Methode gelangt, doch von seiner objektiven Seite, in Bezug auf die Arithmetik angesehen, durchaus ein Regelrechnen zu nennen, weil es — wie schon erwähnt — den Inhalt nach gewissen allgemeinen und (noch ehe der Schüler seine Operation beginnt) fix und fertigen Formen abtheilt, und das Spezielle der vorliegenden Aufgabe rückwärts auf das allgemeine Schema bezieht.

Nachdem hier also die sogenannten Proportionsrechnungen glücklich von der Regel losgemacht waren, kam es nur darauf an, das ganze elementarische Rechnen von dem ihm noch anhängenden Regelwerk zu befreien, und es der objektiv-mathematischen, d. h. nicht der einseitig abstrakten der ersten Periode, sondern der zugleich anschaulichen vom Einzelnen zum Allgemeinen hin sich bewegenden Methode zu unterwerfen. Das ist denn auch zuerst und am vollständigsten geschehen in dem Leitfaden von Unger †), und der Grundsatz, das Rechnen müsse die Ma-

*) „Hundert Aufgaben, elementarisch gelöst“. Oder: Praktische Anleitung, die Aufgaben der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, der niederen Wechselrechnung, der Diskonto-, Termin- und Rabattrechnung, so wie der Gesellschafts- und Mischungsrechnung ohne Anwendung der Proportionen zu lösen“ Weißenfels, Meusel 1837. 5te Aufl. Leipzig, Merseburger 1868. — Ein allen Elementarlehrern bestens zu empfehlendes Büchlein.

**) S. V. heißt es hier: „Ich verlange nicht, daß der Schüler meine Aufgaben ausschließlich im Kopfe rechne; wo die Zahlen zu groß werden, da mag er immerhin das Nothwendigste notiren. Nur von Regeln und Formeln sei nicht die Rede! Es ist auch in wohlbedachter Absicht geschehen, daß ich die Exempel ohne Angabe der Rechnungsarten zusammengestellt habe. Die Namen machen's nicht; an die Sache halte sich der Lernende. Er werde sich der Beziehungen klar bewußt, in welchen Zeit, Raum, Kraft, Wirkung, Menge, Gewicht rc. zu einander stehen, dann vermehre oder vermindere er die gegebenen Zahlen nach bestem Dafürhalten. Das ist Alles.“

†) „Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen, als Grundlage eines zweckmäßigen Rechenunterrichts überhaupt. Für Elementarlehrer, so wie für diejenigen, die sich selbst unterrichten wollen. Nach einer eigenthümlichen Methode bearbeitet von Dr. E. S. Unger.“ Erfurt, Keysersche Buchhandl. 1841. (Der Verfasser hätte den Titel seines Werkes nur passender als Leitfaden für das „Denkrechnen“ bezeichnen sollen.)

thematik der Volksschule sein, in einer Weise ausgeführt, wie wir der Art noch kein Werk haben. Wenn wir davon absehen, daß noch manches bloß Individuelle in der hier durchgeführten Methode mit unterläuft, auch davon, daß das wichtige mathematische Element, Form durch Zahl zu bestimmen, wir meinen die Auflösung der algebraischen Aufgaben durch Anschauung*), noch nicht so berücksichtigt ist, wie es „eine Mathematik der Volksschule" verlangt: so ist doch das konsequent ausgeführt, was wir oben als nothwendig für einen intensiv-bildenden (sittlich einwirkenden) Rechenunterricht postulirten: eine organische Gliederung des Rechenstoffes aus dem Wesen der Zahl heraus, wo das mathematische Objekt, und nicht die Operation und Regel das Eintheilungsprinzip abgibt. Nur über den Anfang seines Lehrganges scheint der Verfasser im Unklaren zu sein. Wenn er für denselben bloß „das Zählen" voraussetzt, so setzt er zu wenig voraus, und wenn er den Unterricht in den vier Grundrechnungen als ein „Regelrechnen" faßt, das so nebenbei, und zwar „so schnell als möglich" abgethan werden müsse, so hat er eine zu geringe Meinung von diesen ersten Uebungen. Sein Leitfaden gehört aber für die Volksschule (vergl. Einleit. S. 9), als in welcher der eigentliche arithmetische Unterricht beginnt, welcher einen propädeutischen der Elementarschule zur Voraussetzung hat, worin eben die Spezies mit ganzen und gebrochenen Zahlen zur Fertigkeit gebracht werden. Dieser propädeutische Rechenunterricht aber muß als wesentliche Grundlage in organische Verbindung mit dem ihm nachfolgenden gebracht werden, und vom ersten Anfang ein „Denkrechnen" sein, d. h. vom Wesen der Zahl seinen Ausgangspunkt haben, und in der Entwickelung dieses rein arithmetischen Stoffes seine organische Gliederung finden. Das schriftliche Rechnen bleibt dann kein bloßes Regelrechnen mehr, sondern wird nur die Uebung und Fertigkeit in der vorher systematisch entwickelten Anschauung. — Damit sind wir denn auf den Punkt gelangt, die Methode für einen bildenden Rechenunterricht in der Elementarschule zu bestimmen.

Wie das spätere Rechnen von dem abstrakten Regelwerk der „einzelnen Rechnungsarten" loszumachen ist, so sind die elementaren Vorübungen von dem Formalismus der „Spezies" zu befreien. So lange die Eintheilung dieses elementaren Theils vom Rechenunterrichte in die vier Spezies beibehalten wird, kann es auch nicht zu einer lebendigen Durchdringung der subjektiven und objektiven Methode kommen. Diese Zersplitterung des Stoffes ist noch ein Ueberbleibsel aus jener ersten Periode, und hat nur für das Zifferrechnen Bedeutung, so lange dieses nämlich im Gegensatze zum Kopfrechnen festgehalten wird, welcher Gegensatz aber — wie wir gezeigt — ein unwesentlicher, darum nicht maaßgebender ist. Das elementare Rechnen nach den Spezies auseinanderfallen zu lassen, ist dasselbe, als im „Anschauungsunterrichte" dem Kinde

---

*) Hentschel hat auch hier gute Bahn gebrochen. Man sehe: „Ueber algebraische Aufgaben als Förderungsmittel eines bildenden Rechenunterrichts in Volksschulen" in Zerrenner's Mittheilungen 2c. Halle bei Kümmel. Vergl. den Aufsatz: „Ueber anschauliche Auflösung algebraischer Aufgaben" von Otto Schulz im 4ten Heft des Brandenb. Schulblatts 1841.

die Gegenstände nach den Rubriken von Größe, Gestalt, Farbe ꝛc. vorzuführen, oder die Botanik mit dem Linné'schen Systeme zu beginnen. Wie aber das Kind den Gegenstand nicht kennen lernt, wenn es nach einem Merkmale verschiedene Gegenstände anschaut, sondern wenn es den einen Gegenstand nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachtet — und wie es falsch ist, dem Anfänger in der Botanik die Pflanzen so vorzuführen, daß er erst nur die Wurzel, dann den Stengel ꝛc. anschaue, da er vielmehr die Pflanze ganz sieht und sehen soll: so lernt der Schüler auch z. B. die Zahl 4 nicht kennen, nämlich mit wahrer Durchdringung des Objekts, wenn er heute $2 + 2 = 4$ lernt, nach einigen Wochen, wenn das Subtrahiren an die Reihe kommt, $4 - 2 = 2$ ꝛc. Vielmehr hat er ja, wenn er weiß, daß $2 \times 2 = 4$, damit zugleich die übrigen Anschauungen: $2 + 2 = 4$, $4 - 2 = 2$, $2 : 4 = 2$, und die Methodik hat Unrecht, wenn sie diesen objektiven Zusammenhang „nach den Operationen" zerreißt. Eine solche Theilung stärkt aber nicht, sondern schwächt die Kraft der Anschauung, weil sie deren Konzentration auf Einen Punkt und somit das „Beobachten im Anschauen" hindert. Der Elementarschüler lerne die Zahlen nicht vereinzelt und abgerissen nach den Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplizirens und Dividirens, sondern jede Zahl (im Raume von 1 — 100) allseitig nach jenen Operationen in ihrer organischen Einheit kennen und behandeln.

Hier ist nun unter unsern Methodikern für die Anfänge des Rechenunterrichts wieder Krancke gebührend anzuerkennen. Er gehört zu denen, welche der angedeuteten Idee vom Organismus im Rechnen sich am meisten nähern, und auf ein mehr heuristisches Verfahren von Seiten des Lehrers, auf ein mehr selbstthätiges Anschauen von Seiten des Schülers hinarbeiten. Zu diesem Zwecke vermeidet er auf der ersten Stufe jene Sonderung des Zählens und der Spezies; dringt vielmehr darauf, daß der Schüler, sobald er eine Zahl kennen gelernt habe, sogleich mit derselben rechne. So erklärt er sich (Anleitung zu einem zweckmäßigen Unterricht ꝛc. S. 85) ganz bestimmt dahin: „Dieser Gang (des ersten elementaren Rechnens) kann nicht nach der gewöhnlichen Reihenfolge der vier Grundrechnungen gebildet werden, ebensowenig, daß der Schüler erst hintereinander bis zu einer gewissen Höhe zählen, und dann rechnen lerne. Der Schüler muß nothwendig zählen und rechnen zugleich lernen. So wie er die Vorstellung einer höhern Zahl gewinnt, lerne er zugleich alle möglichen oder doch mannigfache Verknüpfungen dieser neuen Zahl mit der vorhergehenden vornehmen." — Aber in praxi läßt K. die folgende Zahl nur mit der „vorhergehenden" vergleichen, jene somit nur einseitig anschauen, anstatt daß alle vorangegangenen Anschauungen in den folgenden sich wiederholen, jede folgende Zahl mit der ihr vorangegangenen gemessen werden sollte*). Dazu zersplittert er nach den ersten Uebungen den Stoff wie-

*) Nämlich im Zahlraume von 1 bis 100, um den es sich hier zunächst handelt.

der auf die alte Weise, so daß die objektive Einheit, als das Ganze beherrschend, keineswegs hervortritt.

Da der Zahlraum, welcher der Anschauung unmittelbar offen liegt und zugänglich ist, der von 1 bis 100 ist, und alles Rechnen mit größeren Zahlen' nur durch Beziehung derselben auf das erste Hundert bewerkstelligt wird; so muß in diesem Raume jede Zahl nach ihren verschiedenen Bestandtheilen klar vor der Seele des Schülers stehen; aus der allseitigen Anschauung der einzelnen Zahlen müssen die Operationen der Spezies von selbst hervorgehen, und selbst die angewandten Aufgaben nur dazu dienen, um die Vorstellung der reinen Zahl desto mehr zu befestigen; dabei endlich müssen die einzelnen Stufen in einem solchen organischen Zusammenhang stehen, daß die eine sich in der anderen wieder und reicher entfaltet. Nur so wird der Grund gelegt für ein schnelles Kopfrechnen sowohl wie für ein gründliches Denkrechnen. Der Schüler empfängt das nöthige Material, das er dann später zu jeder Operation gegenwärtig und bereit hat.

Verweilen wir, um den Gegensatz unsers „Denkrechnens" und des bisherigen „Regelrechnens" mehr hervorzuheben, noch etwas bei den oben besprochenen Anweisungen von Scholz und Diesterweg. Bei ersterem muß der Schüler, um z. B. jene vier Sätze von der 4 zu erfahren, zwanzig Paragraphen durcharbeiten, und dann hat er sie immer noch zerstreut und abgerissen; und was Scholz zuletzt in einer Nebenübung von §. 20 gibt, nämlich „allseitiges Anschauen der Zahlen", damit fangen wir an, das machen wir zur Hauptübung, und vereinigen in einem Paragraphen jene 20 Paragraphen. Bei den Brüchen ist jene Zerstückelung wo möglich noch größer. So werden in dem praktischen Rechenbuche von Diesterweg die Brüche unter folgenden Rubriken behandelt:

1) Vorübungen,
2) Das Aufheben der Brüche,
3) Ungleichnamige Brüche durch größere Zahlen darzustellen,
4) Resolution in Brüchen,
5) Reduktion in Brüchen,
6) Addiren,
7) Subtrahiren ꝛc.,

während in der allseitigen Anschauung eines Bruches das Alles beisammen ist. Die Anschauung z. B. eines Sechstels involvirt folgende:

$6 : 1 = \frac{1}{6}$ *), $6 : 2 = \frac{2}{6}$, $6 : 3 = \frac{3}{6}$ ꝛc.

$6 \times \frac{1}{6} = 1$, $6 \times \frac{2}{6} = 2$, $6 \times \frac{3}{6} = 3$ ꝛc.

$\frac{1}{6} : 1 = 6$ **), $\frac{1}{6} : 2 = 12$, $\frac{1}{6} : 3 = 18$ ꝛc.

$2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ꝛc.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ꝛc.

---

*) 6 steckt in 1 $\frac{1}{6}$mal oder mit seinem 6ten Theile 1mal.

**) $\frac{1}{6}$ steckt in 1 6mal.

Ferner: $\frac{1}{6}$ Thlr. = 5 Sgr., $\frac{2}{6}$ Thlr. = 10 Sgr. = $\frac{1}{3}$ Thlr. ꝛc.
5 : $\frac{1}{6}$ Thlr. = 1 Sgr. = $\frac{1}{30}$ Thlr.
3 × $\frac{1}{6}$ Thlr. = $\frac{1}{2}$ Thlr.
3 : $\frac{1}{2}$ Thlr. = $\frac{1}{6}$ Thlr.
$\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ Thlr. = $\frac{5}{6}$ Thlr.
$\frac{1}{6}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ Thlr. + $\frac{1}{2}$ Thlr. = $\frac{6}{6}$ Thlr. = 1 Thlr.
ꝛc. ꝛc.

Mit dem gerügten Schematismus hängen jene Reihenfolgen zusammen, die für den Anfang des Rechnens ganz unzweckmäßig sind. So läßt Diesterweg (methodisches Handbuch ꝛc.) das Rechnen mit dem Zusammenzählen beginnen in der Weise: Ein Strich; ein Strich und ein Strich sind zwei Striche; zwei Striche und ein Strich sind drei Striche ꝛc.; auf eins folgt zwei, auf zwei folgt drei ꝛc. ꝛc.; das ist der erste, das ist der zweite, das ist der dritte Strich ꝛc. ꝛc.; eins ist einmal eins, zwei ist zwei mal eins, drei ist drei mal eins ꝛc. ꝛc.; dann mit der Zwei zusammenzählen, dann mit der Drei. Diese Uebungen müssen sich aber am Schlusse jeder Uebung von selbst ergeben und brauchen nicht erst gelernt zu werden. Ist die Sechs oder die Neun allseitig angeschaut, dann mag man diese Anschauungen in Reihenfolgen, wie:

1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5, 5 + 1 = 6.
1 × 1 = 1, 2 × 1 = 2, 3 × 1 = 3, ... 6 × 1 = 6.
1 + 2 = 3, 2 + 2 = 4, 3 + 2 = 5, 4 + 2 = 6.
6 — 1 = 5, 5 — 1 = 4, ... 2 — 1 = 1.
6 — 2 = 4, 5 — 2 = 3, ... 3 — 2 = 1.

oder für die Neun:

1 + 3 = 4, 2 + 3 = 5, ... 6 + 3 = 9.
1 × 3 = 3, 2 × 3 = 6, 3 × 3 = 9.
9 — 3 = 6, 8 — 3 = 5, ... 4 — 3 = 1.
9 — 3 = 6, 6 — 3 = 3, 3 — 3 = 0 ꝛc.

den Schüler übersehen lassen, aber nicht damit anfangen. Sonst führt ein solches Hersagen von Reihen nicht zu der beabsichtigten Durchdringung der Zahl, sondern nur zu leicht zum Mechanismus und Gedächtnißwerk, weil das Sprachgesetz in Bildung der Zahlwörter so einfach ist, und dem Schüler zum Nachtheil seiner Anschauung hilft. Man lernt die Zahl nicht gründlich kennen, wenn man eine ganze Reihe derselben erst mit der Eins, dann mit der Zwei u. s. f. mißt, sondern wenn man die eine Zahl gleich von vorn herein mit der Eins, Zwei ꝛc. mißt. Wenn Diesterweg für den Elementarkursus der Formenlehre in dem Anschauungsunterrichte („Der Unterricht in der Kleinkinderschule" ꝛc. 5te Aufl. Bielefeld 1852) jeden Körper erst einzeln, nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachten läßt, und dann die nach ihren verschiedenen Merkmalen betrachteten Körper nach gewissen gemeinschaftlichen Merkmalen, als nach den Flächen, Kanten, Ecken ꝛc. zusammenstellt und vergleichen läßt: so ist das der natur- und zweckgemäße Weg, von dem wir nicht absehen, warum er nicht ebenso für das elementarische Rechnen eingeschlagen wird. Die einzelnen Anschauungen einer Zahl

von einander gerissen und ohne ihren Zusammenhang im Ganzen sind unfruchtbare und unlebendige Theile, keine Glieder.

Was nun das Kopf- und Tafelrechnen betrifft, so hat man beides wohl insoweit verbunden, daß dieses von jenem angebahnt wird, aber beide stehen doch noch zu isolirt neben einander. Wir haben es schon erwähnt, daß für den Kursus der Anschauung gar kein Unterschied existirt zwischen einem Kopf- und Zifferrechnen, beides ist dasselbe Denkrechnen. Darum muß, wie die Vorstellung sich unmittelbar in dem äußeren Zeichen des Wortes ausprägt, auch für den ersten Kursus an die durch Striche oder Stäbe ꝛc. anschaulich gemachte Zahl die Ziffer als ein entsprechendes Zeichen unmittelbar hinantreten, auf daß die Anschauung von Ziffer und Zahl um so fester sich amalgamire. Darum ist im Anfange jede Stunde zugleich eine Stunde des Kopf- und Tafelrechnens und erst in einem folgenden Kurse (der Uebung) mag Behufs der Fertigkeit das Zifferrechnen mit seiner eigenthümlichen Behandlung sich absondern.

Ferner: Man hat wohl das reine Rechnen mit dem angewandten verbunden, aber beides steht ebenfalls noch nicht in einem organischen Zusammenhange. Es genügt nicht, daß die reine Zahl an irgend einem Orte überhaupt einmal zur Anwendung kommen, sondern sie muß für ihre allseitige Beschauung sogleich zur Anwendung gebracht werden; erst dann ist sie gründlich angeschaut, wenn sie in ihrer Nacktheit und in dem Gewande ihrer Anwendung zugleich angeschaut ist. Das „Rechnen" besteht in der ungetrennten Einheit der beiden Thätigkeiten, des Erkennens der Zahlverhältnisse als solcher, und ihrer Verknüpfung mit der Praxis des Lebens. Wer bloß die erstere Thätigkeit auszuüben versteht, mag er auch alle Zahlen nach allen Spezies noch so gut zu behandeln wissen, kann darum noch nicht rechnen. Darum gehört zu einer für den Zweck des praktischen Rechnens genügenden allseitigen Auffassung einer Zahl diese theoretisch-praktische Thätigkeit. Ist z. B. die Zahl 6 in den reinen Zahlenverhältnissen, als 6×1, 3×2 ꝛc. erfaßt, so reihet sich unmittelbar daran die Anwendung, d. h. die Verknüpfung dieser Anschauungen mit den in den Gesichtskreis des 6jährigen Kindes fallenden Beziehungen des Lebens, als z. B.: Wenn 1 Semmel 1 Pfennig kostet, was kosten 6 Semmeln? Wenn 6 Semmeln einen Sechser (6 Pfennige) kosten, wie theuer ist eine? Wenn 1 Semmel 2 Pfennige kostet, was 3 Semmeln? Wenn 3 Semmeln 6 Pfennige kosten, was eine? Wenn 1 Loth Zucker 2 Pfennige kostet, was 3 Loth? ꝛc. Man verwechsele dieses eigentlich „angewandte" Rechnen nicht mit dem bloß „benannten". Das elementarische Rechnen ist eigentlich immer benanntes, da die Zahl immer an gewissen Objekten angeschaut werden muß, seien dies nun Striche oder Stäbchen oder Loth oder Pfennige. Damit das Kind sich die reine Zahlvorstellung abstrahiren lerne, wird mit den „Benennungen" gewechselt. Weil aber hierbei die Ausdrücke der Operation, als zähle hinzu, nimm weg, vervielfache ꝛc. beibehalten werden, so findet auch der eigenthümliche Prozeß der Anwendung noch nicht Statt, welcher eben in der Erkenntniß der Nothwendigkeit des Zusammenhanges jener Opera-

tion des Hinzuthuns, Wegnehmens 2c. mit den Fällen des praktischen Lebens besteht. So muß der Schüler in dem konkreten Falle: Wenn 1 Loth Zucker 2 Pfennige kostet, was kosten 3 Loth? den allgemeinen Satz: „Wenn ich eine Waare 3 mal nehme, so muß ich auch den Preis dafür 3 mal hinlegen", abstrahiren, und als den Grund erkennen, die Operation 3 × 2 Pfennige = 6 Pfennige, als Lösung der Aufgabe vorzunehmen. Ist der Schüler in Beziehung auf die Sechs dahin gelangt, ihre reinen Verhältnisse in dem Gewande der Praxis zu erkennen, dann hat er sie allseitig und gründlich erkannt. Nun meinen wir aber, daß Behufs dieser allseitigen Anschauung das Zahlobjekt fixirt werden muß, damit man die organische Einheit, in welcher alle jene Verhältnisse der reinen Zahl und der Anwendung ihren Mittelpunkt finden, und um welche sie wie um ihren Kern sich herumzulegen haben, nicht störe. So wird der Schüler gleichsam von selbst darauf geführt, die Verhältnisse der vor seinen Augen stehenden Zahl aus der Kombination des Begriffs in ihrer Anwendung herauszuerkennen, dieses Mannigfaltige der Anschauung auf die Einheit der reinen Zahlanschauung zu beziehen. *Damit ist dann zugleich ein organischer Fortschritt für die Reihenfolge der angewandten Aufgaben gegeben.* Wie sich das reine Rechnen zu immer vielseitigeren und darum schwierigeren Kombinationen entfaltet, *ebenso zugleich das angewandte*; beide sind für das elementarische Rechnen *eng verbunden*!

Man glaube nicht, daß, wenn wir bei der Sechs schon Aufgaben aus der sogenannten Multiplications- und Divisionsregeldetri zur Anwendung bringen, dies für die Kleinen zu schwer sei. Gerade diese unmittelbare Verknüpfung des reinen und angewandten Rechnens erleichtert dem Kinde den oben angeführten Prozeß. Wenn ich ihm die an der Tafel stehenden 6 Stäbchen in 3 × 2 Stück zerlege, so wird es sich leicht unter diesen Zweiern die 2 Pfennige denken, die es dem Kaufmann 3 mal für die 3 Loth Zucker hinzulegen hat. Indem es aber dasselbe Maaß, daß es mit der 2 an die 6 legt, auch auf das ihm vorgeführte Lebensverhältniß von Waare und Preis überträgt, wird es unmittelbar der Verwandtschaft beider inne. Die, welche die angewandten Aufgaben nach ihrem eigenthümlichen Charakter, abgesondert von den Uebungen des reinen Rechnens, zusammenstellen, weil die „Anwendungsfälle nach ihrem besonderen Wesen auch besonders entwickelt werden müssen", verkennen das Wesen der Anwendung. Dasselbe ist nicht der Raum, nicht die Zeit, nicht der Preis 2c. an sich, sondern das Wesen der Zahl an diesen Begriffen individualisirt. Die Zahl bleibt aber immer der wesentliche Inhalt, und von diesem ist auszugehen. Natürlich darf dann das zweite Geschäft, die Erläuterung des Anwendungs-Verhältnisses nicht unterbleiben. Um das Verhältniß 12 × 12 auf das Größenverhältniß einer Fläche von 12 Fuß Länge und 12 Fuß Breite anzuwenden, muß auf das Wesen dieser eingegangen werden, um dem Schüler die Nothwendigkeit, in diesem Falle die Länge mit der Breite zu multipliziren, zum Bewußtsein zu bringen. Würde nun die „Flächenberechnung" zum Eintheilungsgrunde gewählt, so würde in dieser Exempelreihe der Schüler bei den ersten Beispielen denken, bei den folgenden aber rein

arbeiten. Diese Seite hat auch ihre Berechtigung, aber erst nach der Erkenntniß des Wesens der Zahlen. Darum
im ersten Theile
Anschauung — Erkennen,
im zweiten Theile
Uebung — Können.

Für diesen zweiten Theil, wo auch das Zifferrechnen als solches sich geltend macht, kann dann die bisherige Eintheilung in Spezies ꝛc. beibehalten, jedoch muß der eine Theil stets mit dem andern durch die Anschauung so vermittelt werden, daß die Fertigkeit der Operation aus dem Bewußtsein der Anschauung hervorgehe.

3.

Eintheilung des Stoffes.

Was nun die Extension des Rechenstoffes für die Elementarschule betrifft, so ist die Anordnung desselben folgende:

Ziel = Die Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen.

Zeit = 4 Jahre, 3 Stunden wöchentlich.

Auf diese 3 Stunden wöchentlich bitte ich wohl zu achten. Wir gewinnen durch ein einfacheres Verfahren zugleich eine tiefere Bildung und 40 Stunden im Jahr.

Erster Kursus.

Erstes und zweites Jahr.

Das Rechnen mit den ganzen Zahlen von 1 bis 100.

Erstes Jahr: Im Zahlraum von 1 bis 10 *).
Zweites Jahr: Im Zahlraum von 10 bis 100.

Zweiter Kursus.

Drittes Jahr.

Das Rechnen mit den ganzen Zahlen über 100.

Erstes Semester: Zahlraum von 100 bis 1000. Allseitige Anschauung.
Zweites Semester: Beliebige Zahlräume. Uebung in den einzelnen Operationen.

Dritter Kursus.

Viertes Jahr.

Das Rechnen mit den Bruchzahlen.

Erstes Semester: Allseitige Anschauung.
Zweites Semester: Uebung in den Spezies als solchen.

Aus dieser durch die Natur des Objekts selbst bedingten Anordnung geht hervor, daß der Schüler auf jeder Stufe ein selbständiges Ganze habe. Wenn er auch schon nach dem 1sten Kursus die

*) In gehobenen Elementarschulen wird man nur ein halbes Jahr brauchen.

Schule verließe, so hätte er doch schon das ganze Rechnen in nuce kennen gelernt, und damit die Fähigkeit empfangen, diesen Kern selbst weiter zu entwickeln.

Was nun aber die intensive Bildung betrifft, so meinen wir mit der entwickelten einfacheren Methode das elementarische Rechnen sowohl den Anforderungen an dasselbe als Bildungsmittel für die formelle Seite der Anschauung, wie auch damit zugleich als wirksames Mittel für die sittliche Bildung des Schülers einen Schritt näher gebracht zu haben. Denn

1) mit der organischen Entwickelung unseres Lehrobjekts wird der Schüler zu einer in sich streng zusammenhängenden (kontinuirlichen) Aufmerksamkeit angeleitet, und seinem Geiste die Richtung gegeben, sich in sich festzuhalten;
2) da der Schüler die Mannigfaltigkeit der Rechenoperationen überall in der Anschauung des einen Zahlobjektes konzentriren lernt, so wird er zum Beobachten der Zahl angeleitet;
3) der Schüler arbeitet mit Lust und Liebe zum Dinge. Weil jede folgende Stufe nur eine reichere Entfaltung der vorhergegangenen ist, so wird sie auch um so leichter und freudiger erstiegen in dem Maaße, als der Unterricht selbst fortschreitet. Mit jeder neuen Einheit, welche der Schüler der absolvirten Zahl hinzufügt, empfängt er auch den Reiz, welcher, sich zu der bereits gemachten Anlage organisch gesellend, ihn treibt, nun mit der unbekannten und doch bekannten Zahl auf gleiche Weise zu operiren.

Wo die Liebe zur Arbeit nicht durch die Arbeit selbst hervorgerufen wird, da bleiben alle Zuchtmittel und Ermahnungen vergeblich. Diesen lebendigen Trieb für die Sache in dem Schüler zu erzeugen, ist die Lebensaufgabe des Elementarunterrichtes, welcher für das gesammte Schulleben ebenso für die Erkenntniß- wie für die Willens-Entwickelung den Grund legen soll. Weil aber das Rechnen vorzugsweise das rationelle Objekt der Elementarschule ist, so muß hier auch vorzugsweise jene Einheit des Erkennens und Willens erstrebt werden. Ohne einen organisch gegliederten Unterrichtsstoff möchte aber alle Mühe des Lehrers, auf die sittliche Bildung des Schülers zu wirken, vergebens sein, denn nur mit dem Bewußtsein der in stetiger Einheit sich entwickelnden Kraft kann in dem jungen Geiste der Trieb entstehen, diese selbstthätig weiter zu entwickeln.

II. Lehrgang.

Erster Kursus.

Das Rechnen mit den ganzen Zahlen von 1 bis 100.

Erstes Jahr.

Der Zahlraum von 1 bis 10.

Vorbemerkungen.

1) Wir schärfen es nochmals recht sehr ein, daß jede Rechenstunde zugleich Sprachstunde sein müsse. (Vergl. Einleitung S. 9.) Diese Forderung fällt mit der einer heuristischen Methode des Unterrichts unmittelbar zusammen. Wie der Elementarschüler überhaupt stets in vollständigen Sätzen, laut, deutlich und mit scharfem Wortakzent sprechen muß, so ist besonders für das Rechnen auf eine fließende, abgerundete und saubere Sprache zu dringen, und von vornherein auf die Auflösung jedes Exempels besonders Gewicht zu legen. So lange die Sprache für die Zahl noch nicht fertig ist, ist es auch die Vorstellung der Zahl nicht, und ein Exempel ist noch nicht ausgerechnet, wenn das „Fazit" gefunden, sondern wenn es aufgelöst ist. Die Sprache nehme der Lehrer als Prüfstein, ob eine Stufe vollkommen erstiegen sei oder nicht.

2) Der Lehrer begebe sich möglichst des vielen Fragens, namentlich aller der Fragen, welche die halbe Antwort dem Schüler in den Mund legen. Der Schüler muß so viel als möglich selbst sprechen wollen. Ein zweckmäßiges und für die Bildung zur Aufmerksamkeit sehr wichtiges Hilfsmittel ist es, wenn der Lehrer gewisse feststehende Zeichen anstatt der Worte einführt; als z. B. ein Halbkreis mit dem Zeigefinger der rechten Hand bedeutet: Sprich dich über das Geschehene aus! Ein Kreis: Sprich in einem vollständigen Satze! Eine Bewegung mit der ganzen Hand: Chorsprechen! rc.

3) Daß zur Belebung des Unterrichts Einzel- und Chorsprechen gehörig abwechseln, ist auch für das Rechnen wohl zu beachten. Die in Ziffern dargestellten regelmäßig wiederkehrenden Schemate sind besonders zum Chorsprechen geeignet.

4) Stereotype Anschauungsmittel sind die Finger und Striche; was der Lehrer sonst aus den Umgebungen des Kindes als Hilfsmittel für die Anschauung herbeiziehen will, bleibt seinem Ermessen überlassen.

5) Die Operation auf jeder Stufe besteht ganz einfach darin, daß jede neue Zahl mit den ihr vorangegangenen verglichen und gemessen wird, was bekanntlich nach dem Unterschiedsverhältnisse (arithmetisch) oder nach dem Theilungsverhältnisse (geometrisch) geschieht, und so ergeben sich denn auf objektive Weise die 4 Spezies aus der Anschauung der einzelnen Zahlen von selbst. Auf die Anschauung folgt dann jederzeit die Uebung im schnellen Rechnen und die Darstellung in schwierigeren Kombinationen, als Prüfstein, ob das angeschaute Zahlenverhältniß zur Vorstellung assimilirt ist. Diesem reinen Zahlenverhältnisse muß dann das angewandte gegenübertreten, um jenes in diesem für das praktische Rechnen erkennen und behandeln zu lehren. — So steht das eine mit dem andern in organischem Zusammenhange, und befestigt die Vorstellung jeder einzelnen Zahl; indem so das reine und angewandte Kopf- und Zifferrechnen, Einsicht und Fertigkeit überall Hand in Hand gehen, wird ein selbständiges Rechnen erzeugt.

6) Auf eine nette Darstellung in Ziffern und Strichen ist die nöthige Zeit zu verwenden. Da ein feststehendes Schema für das schriftliche Rechnen auf allen Stufen wiederkehrt, so ist das ein gutes Mittel, die Schüler in der Freizeit (vor der Schule oder zu Hause) passend zu beschäftigen. Die resp. Zahl wird jedesmal zur Stunde aufgeschrieben mitgebracht, was um so eher möglich wird, wenn der Lehrer die Kleinen zum früh in die Schule kommen anzuregen und sie dann in der Zeit vor dem Anfange des Unterrichts in der angedeuteten Weise passend zu beschäftigen versteht.

Erste Stufe.

Die Eins.

Da das Rechnen in dem gegenseitigen Messen (Vergleichen) der Zahlen besteht, so kann mit der Eins, als dem absoluten Maaße, das sich nur selbst zum Maaße hat, nicht gerechnet werden. Der Schüler hat hier nur den abstrakten Begriff der Einheit zu setzen, d. h. an einem Dinge konkret zu machen*).

I. Die reine Zahl.

Ein Finger, ein Strich; eins ist ein mal eins.

Die Schüler lernen schreiben:

| 1

| $1 \times 1 = 1.$

II. Die angewandte Zahl.

*) Man verwechsele nicht die Begriffe „Eins" und „Einheit". Die gesetzte Einheit (nämlich die 1 mal gesetzte) ist die Eins. Darum ist „Eins" eine Zahl, so gut wie „Zehn" oder „Hundert"; jede Zahl läßt sich aber als „Einheit" für ein aus ihr entstandenes „Vielfache" auffassen.

Was in der Stube, zu Hause, am menschlichen Körper nur ein mal ist*).

Zweite Stufe.
Die Zwei.

I. Die reine Zahl,

a. Messen und Vergleichen.

| | 2

| 1

| 1

$$\begin{cases} 1 + 1 = 2. \\ 2 \times 1 = 2. \\ 2 - 1 = 1. \\ 1 : 2 = 2.^{**}) \end{cases}$$

2 ist 1 mehr, als 1.
1 ist 1 weniger, als 2.
2 ist das Zweifache von 1 oder das Doppelte von 1.
1 ist der zweite Theil von 2 oder die Hälfte von 2.

b. Schnellrechnen. —

c. Kombiniren.

Welche Zahl steckt 2mal in der Zwei?
Von welcher Zahl ist 2 das Doppelte?
Von welcher Zahl ist 1 die Hälfte?
Welche Zahl muß ich verdoppeln, um 2 zu bekommen?
Ich kenne eine Zahl, die hat 1 mehr als 1. Welche ist das?
Welche Zahl muß ich zu 1 thun, um 2 zu bekommen?

II. Die angewandte Zahl.

Fritz hatte 2 Pfennige, und kaufte sich für 1 Pfennig Kirschen. Wie viel behielt er noch?

Ein Schieferstift kostet 1 Pfennig. Wie viel kosten 2 Schieferstifte?

Karl hatte in seiner Sparbüchse einen Groschen, seine Schwester hatte gerade noch einmal so viel. Wie viel hatte diese?

Wie viel Pfennigsemmeln kannst du für 2 Pfennige kaufen?

---

*) Wir enthalten uns der detaillirten Ausführung des Verfahrens, als des rein Subjektiven der Methode oder der Manier und setzen für das reine Zahlverhältniß immer bloß das Resultat, wie es sich in der schriftlichen Darstellung fixirt, in der Voraussetzung, daß der Lehrer auf anschauliche Weise dasselbe zu entwickeln wisse. Von dieser Seite ist ja so viel, namentlich im Rechnen, geschehen, daß der Lehrer hier einen völlig geebneten Weg hat, und es nur Raumverschwendung wäre, hier den Lehrgang in seiner Breite auszuführen.

**) „Ich kann die 1 von der 2 2 mal wegnehmen". „Eins ist in zwei zwei mal". — Der Begriff des Enthaltenseins muß überall als der elementare dem des „Theilens" zum Grunde gelegt werden. — Die Bezeichnung der Operation durch Striche, als | | × | = | |, | | — | = | rc. ist gar nicht anschaulich, fällt darum hier als überflüssig fort.

Dritte Stufe.
Die Drei.

I. Die reine Zahl.

a. 1) Messen mit der Eins.

| | | 3

| 1 | 1 + 1 + 1 = 3.
| 1 | 3 × 1 = 3.
| 1 | 3 — 1 — 1 = 1. (denn: 3 — 1 = 2, 2 — 1 = 1.)
1 : 3 = 3. („ich kann die 1 von der 3 3mal wegnehmen, oder 1 ist in 3 3mal.")

2) Messen mit der Zwei.

| | 2 + 1 = 3, 1 + 2 = 3. (2 Finger zusammen)
| 1 × 2 + 1 = 3.
3 — 2 = 1, 3 — 1 = 2.
2 : 3 = 1 (1). (ich kann die 2 von der 3 1mal wegnehmen, und behalte 1 Rest, oder 2c.

3 ist 1 mehr, als 2, 2 mehr, als 1.
2 ist 1 weniger, als 3, 1 mehr, als 1.
1 ist 2 weniger, als 3, 1 weniger, als 2.
3 ist das Dreifache von 1.
1 ist der dritte Theil von 3.

1 und 1 sind gleiche Zahlen, 1 und 2, sowie 2 und 3 sind ungleiche Zahlen. Aus welchen gleichen, und aus welchen ungleichen Zahlen besteht also 3?

b. Wie viel ist 3 — 1 — 1 + 2 getheilt durch 1?
3 × 1 — 2 × 1 + 1 + 1 — 2 + 1 + 1?
Die Antwort muß augenblicklich erfolgen.

c. Von welcher Zahl kannst du das Doppelte von 1 wegnehmen und behälst doch noch 1 übrig?

Welche Zahl ist das Dreifache von 1?

Ich setze eine Zahl 1 mal, und noch 1 mal und noch 1 mal und erhalte 3. Welche Zahl habe ich 3 mal gesetzt?

II. Die angewandte Zahl.

Drei Pfennige nennt man einen Dreier, so wie zwei Pfennige einen Zweier.

Wenn du dir ein Dreierbrödchen kaufen willst, so mußt du wie viel Pfennige haben?

Wie viel Semmeln kauft man für 1 Dreier?

Anna sollte ihrer Mutter ein Loth Zucker holen, das 2 Pfennige kostet und bekam 1 Dreier. Wie viel Geld mußte sie zurückbringen?

Karl hatte einen Spruch gelernt, seine Schwester 2 mehr. Wie viel konnte diese?

Wenn ein Schieferstift 1 Pfennig kostet, so kosten 3 Schieferstifte?

Bertha hatte in ihrem Garten 3 Veilchen gefunden, und trug sie zu ihren Eltern. Wie vertheilte sie aber die Blumen zwischen Papa und Mama?

Vierte Stufe.
Die Vier.

I. a. 1) Messen mit 1.

| | | | 4

| 1 $\begin{cases} 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \ (1 + 1 = 2, \ 2 + 1 \text{ ꝛc.}). \\ 4 \times 1 = 4. \\ 4 - 1 - 1 - 1 = 1. \\ 1 \times 4 = 4. \end{cases}$
| 1
| 1
| 1

2) Messen mit 2.

| | 2 $\begin{cases} 2 + 2 = 4. \\ 2 \times 2 = 4. \\ 4 - 2 = 2. \\ 2 : 4 = 2. \end{cases}$
| | 2

3) Messen mit 3.

| | | $\begin{cases} 3 + 1 = 4, \ 1 + 3 = 4. \\ 1 \times 3 + 1 = 4. \\ 4 - 3 = 1, \ 4 - 1 = 3. \\ 3 : 4 = 1 \ (1). \ (3 \text{ in } 4 \text{ 1mal, mit 1 Rest.}) \end{cases}$
|

Thiere mit 4 Beinen und 2 Beinen — Fahrzeuge mit 1 Rade, 2 und 4 Rädern. Vergleichung derselben.

4 ist 1 mehr als 3, 2 mehr als 2, 3 mehr als 1,
3 ist 1 weniger als 4, 1 mehr als 2, 2 mehr als 1.
2 ist 2 weniger als 4, 1 weniger als 3, 1 mehr als 1.
1 ist 3 weniger als 4, 2 weniger als 3, 1 weniger als 2.
4 ist das 4fache von 1, das 2fache (Doppelte) von 2.
1 ist der 4te Theil von 4, 2 die Hälfte von 4.
Aus welchen gleichen und ungleichen Zahlen ist 4 entstanden?

b. $2 \times 2 - 3 + 2 \times 1 + 1 - 2$ verdoppelt!
$4 - 1 - 1 - 1 + 1 - 3$, wie viel weniger als 4? ꝛc.

c. Welche Zahl muß ich 2mal nehmen, um 4 zu bekommen?
Von welcher Zahl ist 4 das Doppelte?
Von welcher Zahl ist 2 die Hälfte?
Von welcher Zahl ist 1 der 4te Theil?
Welche Zahl läßt sich 2mal von 4 wegnehmen?
Welche Zahl ist um 3 größer als 1?
Wie viel muß ich zu der Hälfte von 4 noch hinzuthun, um 4 zu bekommen?
Wie viel mal 1 hat die Hälfte von 4 weniger als 3?

II. Karoline hatte in ihrem Blumentopfe 4 Tulpen, die sie aber schlecht begoß. Da verwelkten ihr erst eine, dann noch eine und noch eine. Wie viel behielt sie noch?

Wie viel Pfennige sind 2 Zweier?
1 Dreier und 1 Pfennig?

Wie viel Semmeln kannst du für 4 Pfennige kaufen, wenn jede 1 Pfennig kostet?

Wie viel Zweipfennigsemmeln aber?

So oft ich dem Bäcker 2 Pfennige hinlege, gibt er mir 1 Semmel. Ich lege ihm aber 2mal 2 Pfennige hin, also bekomme ich auch 2mal 1 Semmel.

{ | | Pfennige { . Semmel.
{ | | Pfennige { . Semmel.

Eine Bretzel kostet 2 Pfennige, wie viel kosten 2 Bretzeln?

R. bezahlte für 2 Bretzeln 1 Dreier und 1 Pfennig. Wie viel kostete eine?

1 Liter oder 1 Kanne hat 2 Schoppen, wie viel Schoppen kommen auf 2 Kannen?

Wenn 1 Schoppen 2 Groschen kostet, wie viel kostet 1 Liter?

Antw. Ein Liter hat zwei Schoppen; kostet 1 Schoppen 2 Groschen, so kosten 2 Schoppen 2 mal 2 Groschen = 4 Groschen.

Wie viel Schoppen kann man für 4 Groschen kaufen, wenn jeder 2 Groschen kostet?

Wie viel aber, wenn jeder nur 1 Groschen kostet?

Antw. Wenn 1 Schoppen 1 Groschen kostet, so kann man für 4 Groschen 4 mal 1 Schoppen bekommen.

Der Punkt links soll immer 1 Groschen bedeuten; das Kreuz rechts 1 Schoppen.

. Groschen † Schoppen.
. Groschen † Schoppen.
. Groschen † Schoppen.
. Groschen † Schoppen.

So oft ich dem Kaufmann 1 Groschen hinlegen kann, so oft kann ich von ihm auch 1 Schoppen erhalten.

Welcher Theil von 4 Schoppen ist 1 Schoppen? Welcher Theil von 1 Liter ist 1 Schoppen? Welcher Theil von 2 Liter ist 1 Schoppen?

Fünfte Stufe.

Die Fünf.

I. a. 1) Mit 1.

| | | | | 5

| 1 { 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.
| 1 { 5 × 1 = 5.
| 1 { 5 — 1 — 1 — 1 — 1 = 1.
| 1 { 1 : 5 = 5.
| 1

2) Mit 2.

| | 2 { 2 + 2 + 1 = 5.
| | 2 { 2 × 2 + 1 = 5.
| 1 { 5 — 2 — 2 = 1.
{ 2 : 5 = 2 (1).

3) Mit 3.

| | | 3 | $3 + 2 = 5,\ 2 + 3 = 5.$
| | 2 | $1 \times 3 + 2 = 5.$
| | $5 - 3 = 2,\ 5 - 2 = 3.$
| | $3 : 5 = 1\ (2).$

4) Mit 4.

| | | | 4 | $4 + 1 = 5,\ 1 + 4 = 5.$
| 1 | $1 \times 4 + 1 = 5.$
| | $5 - 4 = 1,\ 5 - 1 = 4.$
| | $4 : 5 = 1\ (1).$

Es wird ein Finger nach dem andern in die Höhe gehoben: $1 + 1 = 2$, $2 + 1$ 2c., und $1 \times 1 = 1$, $2 \times 1 = 2$ 2c. Dann wird die Hand platt auf den Tisch gelegt — 1, den Daumen abgesondert: $4 + 1 = 5$, und $1 + 4 = 5$; 2, den Zeigefinger zum Daumen: $2 + 3 = 5$, $3 + 2 = 5$ 2c. Ebenso mit dem Abziehen.

5 ist 1 mehr als 4, 2 mehr als 3, 3 mehr als 2, 4 mehr als 1.
4 ist 1 weniger als 5, 1 mehr als 3 2c.
3 ist 2 weniger als 5 2c.
$5 = 5 \times 1$ (5 ist das 5fache von 1).
$1 = \frac{1}{5} \times 5$ (1 ist der 5te Theil von 5).

Die 5 besteht aus 2 ungleichen Zahlen $3 + 2$, und aus 2 gleichen und 1 ungleichen Zahl $2 \times 2 + 1$.

b. $5 - 2 - 2 + 2 \times 2 - 3$, die Hälfte, 1 ab, 5mal genommen?
$2 \times 2 + 1 - 3 \times 1 \times 2$ (2mal gen.) $- 3 + 4$? 2c.

c. Welche Zahl ist der fünfte Theil von 5?
Wie viel muß ich zu 3 thun, um 5 zu erhalten?
Wie viel muß ich von 5 wegnehmen, um 3 zu bekommen?
Wie viel mal 2 habe ich zu 1 gethan, wenn ich 5 erhalte?
Ich habe von einer Zahl das Doppelte von 2 abgenommen und 1 übrig behalten. Welches war die Zahl?

II. Wie viel Dreier stecken in 5 Pfennigen?

Wie viel Dreier- und Zweierbrödchen kannst du für 5 Pfennige kaufen?

N. hatte von seinem Vater 1 Dreier- und ein Zweierstück bekommen. Damit ging er zum Kaufmann, und holte sich 2 Bogen Papier, den Bogen zu 2 Pfennigen. Wie viel Geld bekam er zurück?

An Strichen und Punkten zu veranschaulichen.

Bertha hatte 3mal herum gestrickt, ihre Schwester 2mal mehr. Wie vielmal diese?

Ein Vater vertheilte unter seine 3 Kinder 5 Pfirsiche. Das jüngste bekam nur eine; wie viel bekam jedes der ältern?

Wie viel Liter stecken in 5 Schoppen?

1 L. { . Schoppen
{ . "
1 L. { . "
{ . "
. "

Wenn 1 Schoppen 1 Groschen kostet, wie viel kosten 2 Liter und 1 Schoppen?

Fritz bekam von der Mutter 2 Zweigroschenstücke und 1 Groschen und sollte dafür Bier holen, wovon der Schoppen 1 Groschen kostet. Wie viel Schoppen (Liter und Schoppen) konnte er bringen?

Sechste Stufe.

Die Sechs.

Der Schüler ist bereits so weit, auf die ihm vorgelegte Frage: Was weißt du mir von der Sechs zu sagen? die nachfolgenden Operationen selbständig vorzunehmen, denn er kommt nach einem solchen Gange selbst hinter die Methode desselben. Der Lehrer kann gewöhnlich sicher darauf rechnen, daß ihm die nächst zu behandelnde Zahl bereits ganz fertig nach dem bekannten Schema ausgeführt zur betreffenden Stunde vorgezeigt wird.

I. a.

| | | | | | 6

| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6,$
$6 \times 1 = 6.$
$6 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 1.$
$1 : 6 = 6.$

| | 2
| | 2
| | 2

$2 + 2 + 2 = 6.$ $(2 + 2 = 4,\ 4 + 2 = 6.)$
$3 \times 2 = 6.$
$6 - 2 - 2 = 2.$
$2 : 6 = 3.$

| | | 3
| | | 3

$3 + 3 = 6.$
$2 \times 3 = 6.$
$6 - 3 = 3.$
$3 : 6 = 2.$

| | | | 4
| | 2

$4 + 2 = 6,\ 2 + 4 = 6.$
$1 \times 4 + 2 = 6.$
$6 - 4 = 2.$
$4 : 6 = 1\ (2).$

| | | | | 5
| 1

$5 + 1 = 6,\ 1 + 5 = 6.$
$1 \times 5 + 1 = 6.$
$6 - 5 = 1.$
$5 : 6 = 1\ (1).$

Thiere mit 6 Beinen verglichen mit 4- und 2beinigen Thieren.

$6 = 5 + 1$ (ist 1 mehr als 5), $4 + 2,\ 3 + 3,\ 2 + 4,\ 1 + 5.$

$5 = 6 - 1$ (ist 1 weniger als 6), $4 + 1,\ 3 + 2,\ 2 + 3,\ 1 + 4.$

$4 = 6 - 2,\ 5 - 1,\ 3 + 1,\ 2 + 2,\ 1 + 3.$

$3 = 6 - 3,\ 5 - 2,\ 4 - 1,\ 2 + 1,\ 1 + 2.$

$2 = 6 - 4,\ 5 - 3,\ 4 - 2,\ 3 - 2,\ 1 + 1.$
$1 = 6 - 5,\ 5 - 4,\ 4 - 3,\ 3 - 2,\ 2 - 1.$
$6 = 6 \times 1$ (ist das 6fache von 1), $3 \times 2,\ 2 \times 3.$
$3 = \frac{1}{2} \times 6$ (ist die Hälfte von 6),
$2 = \frac{1}{3} \times 6.$
$1 = \frac{1}{6} \times 6.$

Aus welchen 3 gleichen und aus welchen 3 ungleichen Zahlen ist 6 zusammengesetzt?

b. $1 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 2 - 1 \times 2 \times 3 - 5 + 5$?

Von 6 Pf. gebe ich aus 1 Pf. und 2 Pf. und 3 Pf. Wie viel Pfennige bleiben mir?

Ich habe 1 Thaler und 3 Thlr. und 2 Thlr., und gebe davon aus 2 Thlr. und 1 Thlr.

$4 + 2 - 3$ ist wie viel weniger als 6?

c. Welche Zahl ist das Dreifache von 2?

Welche Zahl ist das Zweifache von 3?

Welche Zahl kannst du 3mal von 6 und 2mal von 4 fortnehmen?

Wie viel mal Eins hat die Hälfte von 6 mehr als die Hälfte von 4, und wie viel weniger als 5?

Ich habe eine Zahl 2mal von 6 weggenommen und noch 2 übrig behalten. Welche Zahl ist das?

Wie oft steckt der 3te Theil von 6 in der 4?

Die Hälfte von 4 ist gleich welchem Theile von 6?

II. Sechs Pfennige nennt man einen Sechser. Wie viel Einer, Zweier, Dreier hat 1 Sechser?

Wie viel Liter sind 6 Schoppen?

Wie viel kosten 3 Liter, wenn 1 zwei Groschen kostet?

Wie viel Schoppen erhalte ich für 3 Zweigroschenstücke?

Wenn aber 1 Schoppen 2 Groschen kostet, wie viel bekomme ich da für 6 Gr.?

Wilhelm bekam vom Bäcker für 1 Sechser 3 Semmeln. Was kostete 1 Semmel?

Wenn man für 3 Spulen 6 Pfennige bezahlt, wie viel kostet eine?

Wie viel Dreierbrödchen bekommst du für 1 Sechser?

Was kosten 3 Bogen Schreibpapier, wenn 1 Bogen 2 Pfennige gilt?

Wie viel Bogen kann man für einen Sechser kaufen, wenn der Bogen 2 Pf. — 1 Pf. gilt?

So oft ich dem Kaufmann 2 Pf. hinlege, bekomme ich 1 Bogen Papier 2c.

Ich habe in 3 Taschen 6 Aepfel. Wie viel in jeder Tasche?

Siebente Stufe.

Die Sieben.

I. a.

| | | | | | | | 7

| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7.$
$7 \times 1 = 7.$
$7 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 1.$
$1 : 7 = 7.$

| | 2
| | 2
| | 2
| 1

$2 + 2 + 2 + 1 = 7.$
$3 \times 2 + 1 = 7.$
$7 - 2 - 2 - 2 = 1.$
$2 : 7 = 3\ (1).$

| | | 3
| | | 3
| 1

$3 + 3 + 1 = 7.$
$2 \times 3 + 1 = 7.$
$7 - 3 - 3 = 1.$
$3 : 7 = 2\ (1).$

| | | | 4
| | | 3

$4 + 3 = 7,\ 3 + 4 = 7.$
$1 \times 4 + 3 = 7.$
$7 - 4 = 3,\ 7 - 3 = 4.$
$4 : 7 = 1\ (3).$

| | | | | 5
| | 2

$5 + 2 = 7,\ 2 + 5 = 7.$
$1 \times 5 + 2 = 7.$
$7 - 5 = 2.$
$5 : 7 = 1\ (2).$

| | | | | | 6
| 1

$6 + 1 = 7,\ 1 + 6 = 7.$
$1 \times 6 + 1 = 7.$
$7 - 6 = 1.$
$6 : 7 = 1\ (1).$

Macht 7 Punkte und zählt laut! Eins! — wie viel Zweier fehlen noch? Zwei! — Wie viel Einsen fehlen noch? 2c.

Wie vertheilte ein Vater 7 Aepfel unter 2, 3, 4 Kinder?

$7 = 6 + 1,\ 5 + 2,\ 4 + 3$ 2c.
$6 = 7 - 1,\ 5 + 1$ 2c.
$5 = 7 - 2$ 2c.
$7 = 7 \times 1,\ 1 = \frac{1}{7} \times 7.$

Aus welchen gleichen Zahlen ist 7 entstanden?

b. Karl hatte zum Jahrmarkte bekommen 1 Dreier und 2 Pfennige und noch 2 Pfennige, und gibt davon aus 1 Pfennig und noch 1 Pfennig und 2 Pfennige — und behält?

Auf solche in nicht zu schnellem, aber ununterbrochenem Tempo gesprochene Exempel muß die Antwort immer augenblicklich erfolgen.

$3 \times 2 + 1 - 2 \times 3 + 4 - 3 \times 3 + 1$?
$2 + 1 + 2 + 1 + 1$? $1 + 2 + 1 + 2 + 1$?
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$?

c. Von welcher Zahl kannst du 1 7 mal wegnehmen?

Welche Zahl steckt 7 mal in 7?

Zu welcher Zahl muß ich das Dreifache von 2 legen, um 7 zu bekommen?

Ich nehme eine Zahl 2 mal, und bekomme 1 weniger als 7. Welche Zahl habe ich verdoppelt?

Wenn ich eine Zahl 2 mal nehme und 1 weniger bekomme als 7, so ist das 6. Die Zahl aber, welche ich 2 mal genommen habe, ist 3, denn $6 = 2 \times 3$. Also muß ich 3 verdoppeln, um 1 weniger zu bekommen als 7.

Um wie viel mal Eins ist 7 größer als das Doppelte von 2?

Das Doppelte von 2 ist 4. 7 ist 3 mehr als 4, hat also 3×1 mehr als 4. Also ist 7 um 3×1 größer als das Doppelte von 2.

II. Eine Woche hat 7 Tage.

Der erste, zweite ꝛc. siebente Tag heißt? Zwischen dem dritten und fünften Tage liegt? ꝛc.

Ich machte neulich eine Reise, die dauerte gerade eine Woche. Wie viel Tage war ich unterwegs?

Wie viel Geld brauchte ich aber zu der Reise, wenn ich jeden Tag 1 Thaler verzehrte?

Wenn du alle Tage einen Pfennig in deine Sparbüchse thust, wie viel macht das auf 1 Woche?

Wie viel Dreier hast du dann schon gesammelt?

Wie viel Liter stecken in 7 Schoppen?

| | | | | | | |
1 Liter 3 Schoppen

Wie viel Schoppen fehlen noch am 2ten Liter?

Der kleine Georg sollte vom Bäcker 2 Dreierbrödchen holen, und bekam von der Mutter 1 Vierpfennigstück und 1 Dreier. War das genug? Wie viel brachte er wieder?

Ein ander Mal bekam er ein Fünfgroschenstück und ein Zweigroschenstück und sollte dafür Bier holen. Wie viel Schoppen (Liter und Schoppen) erhält er, wenn 1 Schoppen 1 Gr. kostete?

Achte Stufe.

Die Acht.

I. a. | | | | | | | | 8

1
1
1 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$.
1 $8 \times 1 = 8$.
1 $8 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 1$.
1 $1 : 8 = 8$.
1
1

| |	2	$2 + 2 + 2 + 2 = 8.$
| |	2	$4 \times 2 = 8.$
| |	2	$8 - 2 - 2 - 2 = 2.$
| |	2	$2 : 8 = 4.$
| | |	3	$3 + 3 + 2 = 8.$
| | |	3	$2 \times 3 + 2 = 8.$
| |	2	$8 - 3 - 3 = 2.$
		$3 : 8 = 2\ (2).$
		$4 + 4 = 8.$
| | | |	4	$2 \times 4 = 8.$
| | | |	4	$8 - 4 = 4.$
		$4 : 8 = 2.$
		$5 + 3 = 8,\ 3 + 5 = 8.$
| | | | |	5	$1 \times 5 + 3 = 8.$
| | |	3	$8 - 5 = 3.$
		$5 : 8 = 1\ (3).$
		$6 + 2 = 8,\ 2 + 6 = 8.$
| | | | | |	6	$1 \times 6 + 2 = 8.$
| |	2	$8 - 6 = 2.$
		$6 : 8 = 1\ (2).$
		$7 + 1 = 8,\ 1 + 7 = 8.$
| | | | | | |	7	$1 \times 7 + 1 = 8.$
|	1	$8 - 7 = 1.$
		$7 : 8 = 1\ (1).$

Ich habe in 2 Taschen 8 Groschen. Wie viel in jeder?

Der Lehrer kann zur Freude seiner Schüler so lange falsch sagen, bis die Fälle erschöpft sind.

$8 = 7 + 1,\ 6 + 2,\ 5 + 3$ ꝛc.

$7 = 8 - 1$ ꝛc.

$8 = 2 \times 4,\ 4 \times 2,\ 8 \times 1.$

$1 = \frac{1}{8} \times 8,\ 2 = \frac{1}{4} \times 8,\ 4 \times \frac{1}{2} \times 8.$

Die 8 besteht aus 4 gleichen Zahlen, denn sie hat 4×2, und aus 2 gleichen Zahlen, denn sie ist 2×4, ferner aus 2 gleichen und 1 ungleichen Zahl, nämlich $2 \times 3 + 2$.

b. $8 - 1 - 2 - 1 - 2 - 1$?

$1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1$?

$2 + 1 + 2 + 1 + 1$?

$2 \times 2 + 3 + 1 = 5 \times 2 + 2$? ꝛc.

c. Welche Zahl hat den 4ten Theil von 8 dreimal?

Welches ist der Unterschied zwischen der Hälfte von 8 und der Hälfte von 6?

Welche Zahl muß ich verdoppeln, und welche vervielfältigen, um 8 zu bekommen?

Welche Zahl hat 5 × 1 mehr als 3?

Die Zahl, welche 5 × 1 oder 5 mehr hat als 3, ist 3 + 5 = 8.

II. Wie viel Zweier, Dreier, Vierer stecken in 8 Pfennigen?

Wie viel Liter in 8 Schoppen?

Wie viel Wochen in 8 Tagen?

Wilhelm wollte sich 4 Spulen kaufen, das Stück zu 2 Pfennigen. Wie viel Geld mußte er haben? Er bezahlte die Summe in 3 Geldstücken, welche waren das?

Wenn 2 Liter 8 Groschen kosten, wie viel 1 Schoppen?

2 Liter sind 4 Schoppen. Kosten 4 Schoppen 8 Groschen, so kostet 1 Schoppen 2 Groschen *).

Wer vier Zweigroschenstücke hat, kann wie viel Schoppen kaufen?

Wie viel Schoppen aber würde er bekommen, wenn 1 Schoppen 1 Groschen kostet?

•	Groschen	Schoppen
•	"	"
u. s. w.		
• •	Groschen	Schoppen
• •	"	"
• •	"	,
• •	"	"

Neunte Stufe.

Die Neun.

I. a.

| | | | | | | | | | 9

| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9.
9 × 1 = 9.
9 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 = 1.
1 : 9 = 9.

| | 2
| | 2
| | 2
| | 2
| 1

2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9.
4 × 2 + 1 = 9.
9 — 2 — 2 — 2 — 2 = 1.
2 : 9 = 4 (1).

| | | 3
| | | 3
| | | 3

3 + 3 + 3 = 9.
3 × 3 = 9.
9 — 3 — 3 = 3.
3 : 9 = 3 2c.

---

*) Weil der Schüler hier noch in ganz unmittelbarer Anschauung rechnet, so kann ihm die ausführliche Form: „so kostet 1 Schoppen den 8ten Theil von 8 Groschen = 1 Groschen“ erlassen werden.

$9 = 8 + 1,\ 7 + 2,\ 6 + 3$ ꝛc.
$8 = 9 - 1,\ 7 + 1$ ꝛc.
$7 = 9 - 2,\ 8 - 1,\ 6 + 1$ ꝛc.
$9 = 9 \times 1,\ 3 \times 3.$
$1 = \frac{1}{9} \times 1,\ 3 = \frac{1}{3} \times 9.$

Die 9 läßt sich zerlegen in
3 gleiche Zahlen . . . . $3 + 3 + 3$.
4 gleiche Zahlen u. 1 ungl. Zahl $2 + 2 + 2 + 2 + 1$.
2 gleiche Zahlen u. 1 ungl. Zahl $4 + 4 + 1$.
3 ungleiche Zahlen . . . . . $2 + 3 + 4$.
2 ungleiche Zahlen . . . . . $5 + 4$.

b. Wie viel Pfennige sind 1 Dreier, noch 1 Dreier, 1 Zweier und 1 Pfennig?

Von einem Baume fiel herab 1 Apfel, und noch 1, und noch 1, und noch ein und 2×2 Aepfel. Wie viel?

Ich gebe von 9 Thalern aus 2 Thaler, und 1 Thaler, und 3 und 2 und noch 1 Thaler. Wie viel behalte ich?

$3 \times 3 - 3 \times 2 + 2 \times 3 - 2 \times 4 - 7$?
$1 + 2 + 3 + 3 - 2 - 3 - 4$?

c. Wie viel mal 1 ist das Dreifache von 3 größer als das Vierfache von 2?

Welche Zahl kann ich von 9 4 mal wegnehmen, daß ich 1 übrig behalte?

Welcher Theil von der 6 ist der dritte Theil von 9?

Setze 9 aus 2 ungleichen Zahlen zusammen, von denen die eine 1 mehr hat, als die andere?

II. Wie viel Liter stecken in 9 Schoppen, wie viel Wochen in 9 Tagen, wie viel Zweier, Dreier, Vierer, Sechser in 9 Pfennigen?

Die kleine Marie hatte zum Osterfeste ein Lied von 9 Versen aufbekommen. Sie lernte an jedem Tage vorher 3 Verse. Wie viel Tage lernte sie daran?

Ihr Bruder hatte in 3 Tagen 9 Seiten geschrieben; wie viel an jedem Tage?

Wie viel Dreierbrödchen und wie viel Semmeln bekommst du für 9 Pfennige?

Was kosten 3 Bogen Papier, wenn 1 Bogen 3 Pfennige kostet?

Wilhelm sollte seinem Vater 4 Bogen Papier holen, den Bogen zu 2 Pfennigen. Er bekam 1 Sechser und 1 Dreier mit; wie viel Geld mußte er zurückbringen?

Zehnte Stufe.

Die Zehn.

I. a.

| | | | | | | | | | | 10

Nun haben wir die erste Zahl gewonnen, die man wiederum als Einheit betrachtet (als Eins setzt); darum schreibt man auch wieder die

Ziffer 1; aber zum Zeichen, daß in dieser Eins zehn mal so viel steckt, als in der ersten Eins, rückt man sie eine Stelle weiter nach links und will damit sagen: Diese Einheit bedeutet einen Zehner. Die leere Stelle der einfachen Einer wird mit Null bezeichnet.

Zeigt mir 10 Finger! Nun 1 Finger! Bezeichnet diesen mit der Ziffer! Bezeichnet nun die Finger beider Hände mit einer Ziffer!

Hier habe ich 1 Stäbchen; nun wollen wir 10 solcher Stäbchen zusammenbinden. Mit welcher Ziffer schreibt ihr dieß Bündel?

Wie auf den vorigen Stufen!

Die 10 besteht aus 2 gleichen Zahlen 5 + 5, aus 5 gleichen Zahlen 2 + 2 + 2 + 2 + 2, 2 gleichen und 1 ungleichen 3 × 3 + 1, aus 4 ungleichen Zahlen 1 + 2 + 3 + 4.

Uebersicht des Theilverhältnisses.

1 ist die Hälfte von 2,	9 ist das 9fache von 1,
das Drittel von 3,	3fache von 3.
das Viertel von 4 ꝛc.	8 ist das 8fache von 1,
2 ist die Hälfte von 4,	4fache von 2,
das Drittel von 6 ꝛc.	2fache von 4.
10 ist das 10fache von 1,	7 ist das 7fache von 1.
5fache von 2,	5 ist das 5fache von 1.
2fache von 5,	4 ist das 4fache von 1.
3 ist die Hälfte von 6,	2fache von 2.
das Drittel von 9.	
4 ist die Hälfte von 8.	3 ist das 3fache von 1.
5 ist die Hälfte von 10.	2 ist das 2fache von 1.
6 ist das 6fache von 1,	1 ist das 1fache von 1.
3fache von 2,	
2fache von 3.	

Welche Zahlen gehen ohne Rest auf in 10, 9, 8, 6, 4?
Welche sind nur ein Vielfaches der Eins?
(Die Primzahlen 1, 3, 5, 7).

b. Zwei Dreier und zwei Pfennige, und 1 Pfennig und noch 1 Pfennig, weniger 6 Pfennige, davon die Hälfte 3 mal genommen und das Doppelte von 2 Pfennigen hinzugefügt — sind wie viel Pfennige?

1 Liter und 2 Liter, dazu 3 Schoppen und noch 1 Schoppen, weniger 2 Schoppen sind wie viel Liter?

2 × 2 + 2 × 3 — 3 × 3 + 2 × 4 + 1?
10 — 2 — 1 — 2 — 1 — 2 — 1?
1 + 2 + 3 + 4? ꝛc.

c. Welche Zahl hat 1 mehr als das Doppelte von 3?

Um wie viel ist das Zweifache von 5 größer als das Dreifache von 3 und als das Doppelte von 4?

Ein Vater vertheilte unter seine 4 Kinder 10 Aepfel, so daß jedes 1 mehr bekam als das jüngere. Wie viel bekam jedes?

so kann ie Zehn besteht aus den 4 ungleichen Zahlen 1 + 2 + 3 + 4, von denen
8 Grosch nde um 1 größer ist. Darum konnte der Vater die 10 Aepfel unter
der so vertheilen, daß das jüngste 1 Apfel, das folgende 2 ꝛc. bekam.

N. hatte 4 Sprüche gelernt. Sein Bruder sagte: Ich kann noch einmal so viel als du und noch 2 mehr. Wie viel konnte dieser?

Hatte N. 4 Sprüche gelernt, und konnte sein Bruder noch einmal so viel und noch 2 mehr, so konnte dieser $2 \times 4 + 2$ Sprüche $= 10$ Sprüche.

Hermann sagte: Ich bin 5 mal so alt wie mein kleiner Bruder. Dieser war aber 2 Jahr. Wie alt war Hermann?

War der kleine Bruder 2 Jahr und Hermann 5 mal so alt, so war H. $5 \times 2 = 10$ Jahre alt.

II. 10 Schoppen? Liter.

10 Tage? Wochen und Tage.

10 Pfennige? Zweier, Dreier &c.

Fritz hatte 1 Sechser, 1 Dreier und 1 Pfennig. Mit diesem Gelde ging er zum Buchbinder und kaufte sich 4 Bogen weißes Papier, den Bogen zu 2 Pf., und 2 Bogen blaues Papier, den Bogen zu 1 Pf. Reichte sein Geld?

Karl hatte eben so viel Geld und kaufte dafür 3 Briefbogen, den Bogen zu 3 Pf. Wie viel behielt er von seinem Gelde übrig?

Wie viel Liter kann man für 10 Groschen kaufen, wenn 1 Liter 2 Groschen gilt? und wie viel, wenn 1 Schoppen 5 Groschen gilt?

Wie viel Franzbrödchen (à 2 Pf.) bekommst du für 10 Pfennige?

Für 2 Pfennige bekomme ich 1 Franzbrod, also bekomme ich für 10 Pf. 5 Franzbr., denn 10 Pf. $= 5 \times 2$ Pf. Oder: Wenn ich dem Bäcker 2 Pf. hinlege, gibt er mir 1 Franzbr. Habe ich 10 Pf., so kann ich ihm 5×2 Pf. hinlegen, also gibt er mir auch 5×1 Franzbrod.

Ein Neuloth oder Dekagramm hat 10 Gramm. Welcher Theil von einem Neuloth ist ein Gramm?

Wie viel mal 1 Gramm muß ich nehmen, um ein Neuloth (Dekagr.) zu bekommen?

Das Wievielfache von 1 Gramm ist das Neuloth oder Dekagramm?

Wenn 1 Gramm Gewürz 1 Groschen kostet, wie viel kostet 1 Neuloth?

Wie viel Dekagramm kann ich erhalten, wenn ich 2 Fünfgroschenstücke habe, und 1 Gramm 1 Groschen kostet? Wie viel, wenn 1 Gramm 2 Groschen kostet?

Hat ein Neuloth 10 Gramm, so hat ein halbes Loth wie viel Gramm?

Man nennt das Gewicht von 2 Zollpfund 1 Kilogramm. Wie viel Kilo stecken in 10 Zollpfund?

Nenne die Kilogramm von 1 bis 5 in Pfunden:

1	Kilo	hat	2	Pfund
2	„	haben	4	„
3	„	„	6	„
4	„	„	8	„
5	„	„	10	„

In Sachsen hat 1 Neugroschen 10 Pfennige, wie viel Zweipfennigstücke hat da der Neugroschen?

Zehn Groschen nennt man eine Mark. Wie viel Zweigroschenstücke und wie viel Fünfgroschenstücke hat eine Mark?

Ein Viergutegroschenstück ist welcher Theil von einer Mark?

Wie viel Kilogramm kauft man für 1 Mark, wenn eins 1 Groschen, 2 Groschen, 5 Groschen kostet?

Hier zeige ich euch ein Maaß, das nennt man 1 Meter. Zehn solcher Meter bilden 1 Dekameter. Welcher Theil vom Dekameter sind 5 Meter, 2 Meter, 1 Meter?

Hiermit wäre denn der erste und wichtigste Schritt des ganzen Rechenunterrichts geschehen; in der Weise, wie wir ihn gethan wissen wollen, wird der Zeitraum von 1 Jahr nicht zu lang sein. Extensiv hat der Schüler freilich nicht viel gewonnen — er kennt nur die Zahlen von 1 bis 10. Aber er kennt sie auch, und kann damit rechnen. Wozu hülfe es auch, wenn er jetzt schon bis 100 und noch weiter zählen könnte, und dabei die Zahl 9 nicht in ihre Elemente zu zerlegen wüßte? Für diese Durcharbeitung der reinen Zahl machen wir nochmals auf die sub I. c. aufgestellten Uebungen aufmerksam, die in anderen Rechenbüchern wohl unter dem Namen „verschiedene Ausdrucksweise" als ein zufälliges hie und da „nebenbei" vorkommen. Sie sind wesentlich für den Gewinn einer klaren Vorstellung der Zahl, und dürfen weder in einer Dorf- noch Stadt-Elementarschule beeinträchtigt werden. Auch haben sie, wofern nur eine aufmerksame Anschauung vorangegangen ist, durchaus keine Schwierigkeit. Ebenso werden auch die angewandten Aufgaben ohne Mühe von den Schülern gelöst werden, da auf jeder Stufe dasselbe einfache Lebensverhältniß wiederkehrt.

Daß nicht weitergegangen wird, ehe nicht eine Stufe vollkommen erstiegen ist, daß namentlich öfter repetirt werden muß, und die in Ziffern niedergeschriebenen Sätze fest dem Gedächtniß einzuprägen sind — mag gleichfalls hier nochmals erinnert werden.

Zweites Jahr.

Allseitige Anschauung der Zahlen von 10 bis 100.

Vorbemerkungen.

1) Anschauungsmittel bleiben auch hier Finger und Striche. Von jenen kann man ganz eigentlich sagen, daß die Natur dem Menschen das dekadische Zahlensystem an die Hand gegeben habe.

2) Das Verfahren auf den einzelnen Stufen ist ganz das auf den früheren Stufen. Schriftlich bedarf es jetzt übrigens bloß der abgekürzten Addition und Subtraktion, nämlich der Multiplikations- und Divisionsform, obwohl mündlich in der bekannten Weise jede einzelne Zahl in ihre Elemente zerlegt wird (durch das Messen mit den Grundzahlen von 1 bis 10), was mit jeder Stufe rascher von Statten geht, und zu der größten mechanischen Fertigkeit gebracht werden muß. Dieser Mechanismus ist überdies mit der größten Selbstthätigkeit von Seiten des Schülers verbunden.

3) Für die Operation mit der reinen wie mit der angewandten Zahl kann nunmehr schon eine größere Mannigfaltigkeit in der Aus-

drucksweise Statt finden, damit der Schüler von dem Schema immer freier werde. Für die angewandten Aufgaben indessen bewegen wir uns immer in möglichst nahe liegenden Kreisen, um dem Schüler um so mehr Gelegenheit zu geben, sich selbst Aufgaben zu bilden, was zweckmäßig als Belohnung für den gestattet wird, der ein Exempel zuerst löst. Dieses Selbsterfinden von Exempeln kann aber um so weniger Schwierigkeit haben, da immer von der vorangegangenen Stufe ausgegangen und nur das schon Bekannte weiter ausgebildet wird.

Elfte Stufe.

Die Elf.

I. „10 mal Eins" oder „10 Einer" zusammen genommen machen „1 Zehner".

„Habe ich 10 Einer zusammengenommen, so habe ich 1 Zehner und keinen (0) Einer mehr".

| | | | | | | | | | = 1 Zehner 0 Einer = 10.

„Kommt noch 1 Einer hinzu, so gehört der in den zweiten Zehner".

| | | | | | | | | | 10 + 1 = 11.
|

Was bedeutet die 1 rechter Hand, was die 1 linker Hand? Wozu gehört der Einer? Wie viel Einer müßten noch hinzukommen, um den zweiten Zehner voll zu machen? — Wie nennt man 1 Zehner und 1 Einer mit Einem Worte? Was heißt 11?

a. (Mündlich.)

Messen mit 1.

1 + 1 + 1 2c. = 11 (1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3 2c.).
11 × 1 = 11.
11 — 1 — 1 — 1 2c. (11 — 1 = 10, 10 — 1 = 9 2c.).
1 : 11 = 11.

Messen mit 2.

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 11.
5 × 2 + 1 = 11.
11 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2 = 1.
2 : 11 = 5 (1).

u. s. f. bis

Messen mit 10.

10 + 1 = 11.
1 × 10 + 1 = 11 (1 Zehner und 1 Einer ist 11).
11 — 10 = 1.
10 : 11 = 1 (1) (in 11 steckt 1 Zehner + 1 Einer).

Jeder Schüler bekommt hierbei einen Satz und weil er den Gang kennt, muß alles Nachhelfen und Anfangen von Seiten des Lehrers wegfallen.

Schriftlich:

| | | | | | | | | | 10 + 1 = 11.
|

$11 = 11 \times 1.$ | $1 : 11 = 11.$
$5 \times 2 + 1.$ | $2 : 11 = 5$ (1).
$3 \times 3 + 2.$ | $3 : 11 = 3$ (2).
$2 \times 4 + 3.$ | $4 : 11 = 2$ (3).
$2 \times 5 + 1.$ | $5 : 11 = 2$ (1).
$1 \times 6 + 5.$ | $6 : 11 = 1$ (5).
$1 \times 7 + 4.$ | $7 : 11 = 1$ (4).
$1 \times 8 + 3.$ | $8 : 11 = 1$ (3).
$1 \times 9 + 2.$ | $9 : 11 = 1$ (2).
$1 \times 10 + 1.$ | $10 : 11 = 1$ (1).

Vergleichung (mündlich):

$11 = 10 + 1$, $9 + 2$, $8 + 3$ ꝛc.

$11 = 11 \times 1$, $1 = \frac{1}{11} \times 11$ (11 ist das Elffache von 1, 1 ist der elfte Theil von 11).

Setze 11 aus 3 gleichen und 1 ungl. Zahl zusammen!
4 gleichen und 4 ungl. Zahlen zusammen!
5 gleichen und 1 ungl. Zahl zusammen!
4 ungleichen Zahlen! ꝛc.

b. Ich habe 1 Sechser, 1 Dreier, 1 Pfennig und noch 1 Pf., und gebe davon 4 Pf., und 2 Pf. und 3 Pf.; bleibt?

$11 - 2 - 2 - 2 - 3$?

$11 - 1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 2 =$?

$2 \times 5 + 1 - 2 \times 4 + 3$? ꝛc.

c. Wie viel Einer muß ich zu dem Fünffachen von 2 setzen, um 11 zu bekommen?

Von welcher Zahl muß ich das Dreifache von 3 abziehen, um 2 zu erhalten?

Die Zahl, von der ich 3×3 abziehen muß, um 2 zu erhalten, ist $3 \times 3 + 2 = 11$.

Wie oft kann ich den 4ten Theil von 8 von 11 wegnehmen?

Der 4te Theil von 8 ist 2; da $11 = 5 \times 2 + 1$, so kann ich 2 oder den 4ten Theil von 8 5 mal von 11 wegnehmen.

Welche Zahl ist um 1 Zehner größer als 1

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen dem 4fachen von 2 und 11?

Das 4fache von 2 ist 8, der Unterschied von 8 und 11 ist $11 - 8 = 3$ also beträgt der Unterschied zwischen dem 4fachen von 2 und 11 drei.

II. 11 Pfennige = 3 Dreier und 1 Zweier.

Wie viel Pfennige fehlen noch am 3ten Dreier?

oder: 1 Sechser, 1 Dreier und 1 Zweier; oder: 2 Vierer und 1 Dreier.

11 Schoppen = 5 Liter 1 Schoppen.

Es fehlt noch 1 Liter am 3ten Schoppen.

11 Tage = 1 Woche 4 Tage.

Es fehlen noch 3 Tage an der zweiten Woche.

N. hatte zu einer Reise 11 Tage gebraucht, und gerade 11 Thaler verzehrt. Wie viel betrug das auf 1 Tag?

Wenn N. auf 11 Tage 11 Thaler brauchte, so brauchte er auf 1 Tag den 11ten Theil von 11 Thalern = 1 Thaler.

B. hatte auf einer Reise 11 Thaler, und zwar täglich 1 Thaler verzehrt. Wie lange war er unterwegs gewesen?

B. hatte so viel Tage gereist, als er Thaler ausgegeben hatte. Da er 11 Thaler verzehrt, hatte er auch 11 Tage gereist.

Zwölfte Stufe.

Die Zwölf.

I. a.

| | | | | | | | | | 10 + 2 = 12.
| |

Mündlich: 1 + 1 + 1 ꝛc. = 12.
12 × 1 = 12.
12 — 1 — 1 — 1 ꝛc.
1 : 12 = 12.
u. s. f.

Schriftlich:

12 = 12 × 1.	1 : 12 = 12.
6 × 2.	2 : 12 = 6.
4 × 3.	3 : 12 = 4.
3 × 4.	4 : 12 = 3.
2 × 5 + 2.	5 : 12 = 2 (2).
2 × 6.	6 : 12 = 2.
1 × 7 + 5.	7 : 12 = 1 (5).
1 × 8 + 4.	8 : 12 = 1 (4).
1 × 9 + 3.	9 : 12 = 1 (3)
1 × 10 + 2 (1 Z. + 2 E.).	10 : 12 = 1 (2) (in 12 steckt 1 Z. + 2 E.).

12 = 11 + 1, 10 + 2, 9 + 3 ꝛc. (ist 1 mehr als 11, 2 mehr ꝛc.).

12 = 12 × 1 (das 12fache von 1).
6 × 2 (das 6fache von 2).
4 × 3 (das 4fache von 3).
3 × 4 (das 3fache von 4).
2 × 6 (das 2fache von 6).

1 : 12 = 12 (1 ist der 12te Theil von 12).
2 : 12 = 6 (2 ist der 6te Theil von 12).
3 : 12 = 4 (3 ist der 4te Theil von 12).
4 : 12 = 3 (4 ist der dritte Theil von 12).
6 : 12 = 2 (6 ist die Hälfte von 12).

Aus welchen gleichen Zahlen ist 12 entstanden?
Aus welchen ungleichen Zahlen?

Setze 12 aus 3 Zahlen zusammen, von denen die folgende immer 2 mehr hat!

b. 2 × 2 + 2 × 2 + 2 × 2?
2 + 3 + 3 + 2 + 2 — 4 + 4 + 4 × 2?

Von 12 Aepfeln wurden aufgegessen die Hälfte, davon die Hälfte und noch 1 Apfel rc.

Von 12 Pfennigen gibt Jemand aus 1 Dreier und 2 Pfennige, und noch 1 Dreier und 2 Pfennige und noch 1 Pfennig. Wie viel bleibt?

c. Der dritte Theil von 12 ist welcher Theil von 8? Die Hälfte von 12 das Wievielfache von 3? rc.

Welches ist der Unterschied zwischen der Hälfte von 12 und zwischen der Hälfte von 10?

Von welcher Zahl ist 12 das Dreifache?

Welche Zahl muß ich von 12 abziehen, um 9 zu erhalten?

Da $9 + 3 = 12$, so muß ich 3 von 12 rc. — Auf eine algebraische Auflösung ist hier natürlich noch zu verzichten.

Welche Zahl von 12 abgezogen, läßt 4 zum Rest? rc.

II. 12 Stück nennt man 1 Dutzend,
12 Pfennige nennt man 1 Groschen,
12 Monate nennt man 1 Jahr.

(Namen einzuüben.)

Welcher Theil vom Dutzend sind 6 Stück?
Welcher Theil vom Groschen sind 6 Pfennige?
Welcher Theil vom Jahr sind 6 Monate?
Ebenso 3 Stück ein „Viertel"-Dutzend.
Ebenso 3 Monate ein „Viertel"-Jahr.
Ebenso 3 Pfennige ein „Viertel"-Groschen,
und 4 Pfennige ein „Drittel"-Groschen rc.
Wie viel Liter sind 12 Schoppen?
Wie viel Sechser, Dreier rc. hat 1 Groschen?

Ein Monat hat 4 Wochen. Wer monatlich 12 Groschen Schulgeld zahlt, bezahlt wie viel die Woche?

Wer in 1 Monat oder 4 Wochen 12 Groschen Schulgeld bezahlt, bezahlt in einer Woche den 4ten Theil von 12 Gr. = 3 Gr.

Ein Vater bezahlte für seinen Sohn monatlich 2 Thaler Schulgeld, wie viel betrug das in einem Viertel-, wie viel in einem halben Jahre?

Ein Vierteljahr ist der 4te Theil vom Jahr oder 12 Monaten = 3 Monate. Wer in 1 Monat 2 Thaler zahlt, zahlt in 3 Monaten oder 1 Vierteljahre $3 \times 2 = 6$ Thlr.

Karl hatte unter 4 Arme 1 Groschen vertheilt, wie viel Pfennige bekam jeder?

Wie viel Bogen Briefpapier (à 3 Pfennige) kannst du für 1 Groschen kaufen?

So oft ich 3 Pf. habe, bekomme ich 1 Briefbogen. 1 Groschen = 12 Pf. hat 4×3 Pf., also bekomme ich auch 4×1 Bogen oder 4 Bogen. Veranschaulicht:

| | | 0
| | | 0
| | | 0
| | | . . . . 0.

N. sollte seinem Vater 3 Loth Schnupftabak holen, und bekam 1 Groschen. Wie theuer war 1 Loth?

Wer macht Reise-Exempel?

Wer eins mit Dutzend und Stück?

Karoline hatte in 3 Tagen ein Dutzend Sprüche gelernt, wie viel täglich?

Vergleiche einen sächsischen und preußischen Groschen!

Der sächs. Neugr. hat 10 Pfennige, der preußische 12 Pfennige. 10 sächsische Pfennige sind so viel als 12 preußische, also auch 5 Pfennige in Sachsen = 6 Pfennige in Preußen.

$$\left\{\begin{matrix} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{matrix}\right\}$$

Wenn 1 Pfund 3 Thaler kostet, wie viel kosten 2 Kilogramm?

2 Kilogr. = 4 Pfund. Kostet 1 Pfd. 3 Thlr., so kosten 4 Pfd. 4 × 3 Thlr. = 12 Thlr.

Wer für 6 Kilogramm 1 Mark 2 Gr. bezahlt hat, wie hoch kommt dann das Pfund?

6 Kilogr. = 12 Pfund. 1 Mark 2 Sgr. = 12 Sgr. Wer 12 Pfund mit 12 Sgr. bezahlt, der gibt für 1 Pfund 1 Sgr.

Dreizehnte Stufe.

Die Dreizehn.

I. a. und b. bekannt.

c. Bilde aus den Vielfachen von 3 und 2 die Summe 13!

$3 \times 3 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13.$

Wie verhalten sich die Unterschiede von 13 und 9 und 12 und 8?

Der Unterschied von 13 und 9 = 13 — 9 = 4; der Unterschied von 12 und 8 = 12 — 8 = 4; also ist der Unterschied von 13 und 9 gleich dem Unterschiede von 12 und 8.

Vermindere 13 um 6!

13 — 6 = 7, denn 13 — 3 = 10, 10 — 3 = 7.

Welche Zahl ist gleich der Summe von 5 + 8?

Welche Zahl muß ich dem Vierfachen von 3 hinzusetzen, um 13 zu bekommen?

Das Vierfache von 3 ist 12, 12 + 1 = 13, ich muß also noch 1 zu dem Vierfachen von 3 thun, um 13 zu bekommen.

II. 13 Pfennige, Wochen, Tage, Schoppen, Stück — auf ihre höhere Einheiten.

Karl sollte 4 Loth Schnupftabak holen, das Loth zum Dreier. Er bekam 1 Sechser, 1 Vierer und 1 Dreier mit. Reichte das Geld aus?

Kostet 1 Loth 1 Dreier, so kosten 4 Loth 4 Dreier = 1 Groschen, 1 Sechser + 1 Vierer + 1 Dreier = 13 Pfennige = 1 Groschen 1 Pfennig. Karl hatte also 1 Pfennig zu viel, und bekam diesen zurück.

Wie viel Pfund sind sechs und ein halbes Kilogramm?

Wie viel Gramm über 1 Neuloth stecken in 13 Gramm?

Vierzehnte Stufe.

Die Vierzehn.

I. a. —

b. Auf eine Pappel flogen 2 Sperlinge und noch 2, und 3 und noch 3 und noch 2 × 2; bald flogen wieder fort 3 und 4 und 5 und 2. Wie viel blieben sitzen?

K. hatte in ihrer Sparbüchse 3 Pfennige und 4 und 2 und 2 Pfennige und noch 1 Dreier. Wie viel Groschen und Pfennige?

Von 14 Quentchen nimm weg 1 Loth und 3 und 2 Quentchen. Wie viel bleibt?

c. Welche Zahl muß ich verdoppeln, um das Siebenfache von 2 zu erhalten?

Das Siebenfache von 2 = 7 × 2 = 14; da 14 = 2 × 7, so muß ich ꝛc.

Ich habe von 14 eine Zahl 3mal weggenommen und 2 zum Rest erhalten. Welches war die Zahl?

Wenn ich 2 zum Rest erhalte, so war zusammen 12 weggenommen, 12 aber ist = 3 × 4, also habe ich 4 3mal von 14 weggenommen, wenn ich 2 zum Rest bekomme.

| | | | | | | | | | | | |

| | | | |

II. 14 Tage = 2 Wochen.

14 Pfennige = 7 Zweier, 4 Dreier und 1 Zweier, 3 Vierer und 1 Zweier, 2 Sechser und 1 Zweier.

14 Schoppen = 7 Kannen.

14 Pfund = 7 Kilo.

14 Gramm = 1 Neuloth 4 Gramm.

14 Stück = 1 Dutzend und 2 Stück.

14 Monate = 1 Jahr 2 Monate.

Wer 2 Wochen verreisen will und auf jeden Tag 1 Thaler rechnet, muß wie viel mitnehmen?

Was kosten 1 Dutzend 2 Stück Schieferstifte, das Stück zum Pfennig gerechnet?

Wie viel Bogen Papier kauft man für 1 Groschen 2 Pfennige, wenn der Bogen 2 Pfennige gilt?

Marie hatte in 1 Jahr 7 Paar Strümpfe gestrickt, wie viel Dutzend und Stück waren das?

Kauft man für 1 Mark 4 Sgr. 14 Pfund Salz, so kostet 1 Pfund? 1 Kilo?

Wie viel Meter Band kauft man für 1 Mark 4 Sgr., wenn 1 Meter 2 Sgr. — und wie viel, wenn 1 Meter 7 Sgr. kostet?

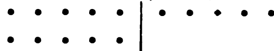
Funfzehnte Stufe.

Die Funfzehn.

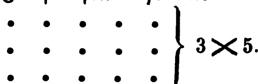
I. c.



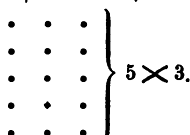
Wie viel Einer stehen im 2ten Zehner?
Wie viel Einer fehlen noch, bis der zweite Zehner voll ist?
Schreibt die 15 in Punkten so, daß immer 5 beisammen stehen!



Schreibt diese Fünfer senkrecht unter einander!



So, daß in einer Reihe nur 3 Punkte stehen!



Aus welchen ungleichen Zahlen besteht 15? Aus welchen 3 ungleichen Zahlen?

Wie viel ist der Unterschied von 15 und 8?

a. Ich sehe zu, wie viel ich zu 8 legen muß, um 15 zu bekommen. 8 + 2 = 10, 10 + 5 = 15, 8 + 7 = 15. Der Unterschied von 8 und 15 ist also 7.

Ich nehme 8 von 15 weg; 15 — 5 = 10, 10 — 3 = 7, 15 — 8 = 7. Also 2c.

In welcher Zahl steckt 1 ganzer und 1 halber Zehner?

Welche 5 Zahlen geben die Summe 15?

Jede folgende dieser 5 Zahlen sei aber um 1 größer als die vorhergehende?

1 + 2 + 3 + 4 + 5.

An einem Osterabende vertheilte eine Mutter unter ihre 5 Kinder gesottene Eier, und zwar nach dem Alter, so daß jedes ältere 1 Ei mehr bekam, als das jüngere. Das mittelste im Alter bekam 3 Eier, wie viel jedes der andern? und welche Summe wurde vertheilt?

Bekam das mittelste 3, so bekam das jüngere 2 E., und das jüngste 1 E.; das ältere aber 4 E. und das älteste 5 Eier. Es wurden also 1 + 2 + 3 + 4 + 5 Eier = 15 Eier vertheilt.

II. 15 Stück nennt man ein Mandel.

Vergleiche ein Dutzend mit einem Mandel!

1 Dutzend = 4 × 3 Stück,
1 Mandel = 5 × 3 Stück = 1 Dutzend + 3 Stück.

15 Pfennige, 15 Tage, 15 Quentchen 2c. auf ihre höhere Einheiten.

15 Silberpfennige = 12 gute Pf. = 1 guter Gr., wie 12 Silberpf. = 1 Silbergr.

Theile den guten Groschen in drei Theile!

Silberpfennige — gute Pfennige

4 gute Pf. = 5 Silberpf.

2 × 4 gute Pf. = 2 × 5 Silberpf. = 8 gute Pf. = 10 Silberpf.

3 × 4 gute Pf. = 3 × 5 Silberpf. = 12 gute Pf. = 15 Silberpfennige.

Vergleiche 1 guten und 1 Silbergroschen!

Wie viel gute Groschen kostet 1 Mandel Aepfel, wenn das Stück zum Silberpfennig verkauft wird?

Wenn das Mandel Birnen 1 guten Groschen gilt, wie viel Silberpfennige kostet eine? wie viel das Dutzend?

3 Bogen feines Papier kosten 1 guten Gr., wie viel Silberpfennige 1 Bogen?

1 guter Gr. = 1 Sgr. 3 Pf. = 15 Silberpf.; kosten 3 Bogen 15 Silberpf., so kostet 1 Bogen den 3ten Theil von 15 Silberpf. = 5 Silberpf. = 4 gute Pf.

Wenn aber 3 Bogen nur 1 Silbergroschen kosteten, wie viel Silberpf. machte das auf 1 Bogen weniger?

Wer 15 Silbergroschen im Beutel hat, der hat wie viel Mark darin?

1 Mark 5 Sgr.

Welcher Theil von einer Mark sind 5 Sgr.? Wie kann man daher 5 Sgr. nennen?

Wie viel Kilogr. sind 15 Pfund?

Wie viel Pfund kann man für 15 Sgr. kaufen, wenn eins 5 Sgr. kostet?

So oft ich dem Kaufmann 5 Sgr. hinlege, so viel mal erhalte ich 1 Pfund. Nun sind 15 Sgr. = 3 × 5 Sgr., folglich erhalte ich dafür 3 × 1 Pfund.

Jemand hatte 3 Meter Tuch gekauft und 15 Thaler dafür bezahlt. Wie theuer kam ihm das Meter zu stehen?

Sechzehnte Stufe.

Die Sechzehn.

I. a.

Wie viel Einer, Zweier, Dreier stehen im 2ten Zehner?

Theilt 2, 4, 8 Striche ab!

Schreibt je 2 Punkte senkrecht untereinander; je 4, je 8!

8 × 2 4 × 4 2 × 8

Wo stehen gleich viel Punkte in wagerechter und senkrechter Linie?

Gewandtere Schüler können hier schon 1 Quadrat zeichnen und in 16 Felder theilen.

b. Wie viel ist 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2?
Wie viel 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 weniger als 16?
Wie viel ist 2 × 2 + 2 × 2 + 2 × 2 + 2 × 2?
Wie viel ist 16 — 3 — 3 — 3 — 3 — 2?

I. c. Wie findest du die Hälfte von 16?

16 = 1 Zehner + 6 Einer. Die Hälfte von 1 Zehner = 5 E., die Hälfte von 6 E. = 3 E. 5 E. + 3 E. = 8, also ist die Hälfte von 16 = 8.

A. hatte 6 Groschen. B. sagte, wenn du den 3ten Theil deines Geldes 8mal nimmst, so hast du meine Summe. Wie viel hatte B.?

Die Summe von B. war 8 × $\frac{1}{2}$ des Geldes von A.; $\frac{1}{3}$ × 6 Gr. (der dritte Theil) = 2 Gr., also hatte B. 8 × 2 Gr. = 16 Gr.

A. B.

Welche Zahl ist gleich dem Zweifachen des 4ten Theils von 16, und welcher Theil von 16 ist das?

Der 4te Theil von 16 = 4, das Zweifache desselben = 2 × 4 = 8, also ist 8 das Zweifache des 4ten Theils von 16. Da aber 16 = 2 × 8, so ist 8 die Hälfte von 16.

8 } 8 } 16.

II. 16 Gramm, 16 Pfund, 16 Silberpfennige, 16 gute Pfennige, 16 Monate, 16 Tage, 16 Stück.

1 Schock hat 4 Mandel; wie viel Mandel sind 4 Schock?

Jemand hatte für 1 Mark 6 Sgr. Aepfel gekauft und 2 Schock bekommen. Wie theuer war das Schock, die Mandel?

Ein Gärtner pflanzte ein Mandel und 1 Stück Tulpenzwiebeln auf 4 Beete. Wie viel auf jedes?

16 Metzen = 1 Scheffel.
Wie viel ist ein halber, wie viel ein Viertel=Scheffel?

Man kaufte 4 Metzen Kartoffeln für 3 Groschen, wie viel kostete der halbe und wie viel der ganze Scheffel?

Wenn der Scheffel Kartoffeln 12 Groschen gilt, wie theuer ist dann das Viertel?*)

Ein Viertel ist der 4te Theil eines Scheffels, kostet also auch nur den 4ten Theil von dem, was 1 Scheffel kostet — $\frac{1}{4} \times 12$ Groschen — 3 Groschen.

Siebzehnte Stufe.

Die Sieb(en)zehn.

I. a. | | | | | | | | | | / | | | | | | | $= 10 + 7 = 17.$

Unsere zweite Zehnerreihe wird immer voller. Wie viel Einer haben wir darin? Wie nennen wir die ganze Zahl? Wie viel Einer fehlen noch, bis der zweite Zehner voll ist? Wie viel Einer hat die erste Reihe mehr?

Mit wie viel Zahlen können wir die Siebzehn messen? Fangen wir mit 16 an!

$17 = 16 + 1.$
$15 + 2.$
$14 + 3$ rc.

Aus wie viel Einsen, Zweien, Dreien rc. besteht 17?

$17 = 17 \times 1.$
$8 \times 2 + 1.$
$5 \times 3 + 2$ rc.

Setze 17 aus 2 gleichen und einer ungleichen Zahl zusammen!

$17 = 2 \times 8 + 1.$
$2 \times 7 + 3.$
$2 \times 6 + 5.$

Setze 17 aus 3 gleichen und einer ungleichen Zahl zusammen!

$17 = 3 \times 5 + 2.$
$3 \times 4 + 5.$
$3 \times 3 + 8$ rc.

Setze 17 aus 4 gleichen und einer ungleichen, ferner aus 5 gleichen und einer ungleichen Zahl zusammen!

b. 17 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2?
17 — 3 — 3 — 3 rc.
17 — 4 — 4 — 4 rc.
17 — 5 rc.
$1 + 2 + 3 + 4 + 5$ — wie viel fehlt noch an 17?

2 Dreier und ein Sechser und noch ein Dreier, wie viel Pfennige fehlen noch an 17 Pfennigen?

2 Kilo und 1 Pfund und noch 2 Kilo und 1 Pfund und noch 2 Kilo und 1 Pfund und noch 2 Kilo — wie viel Pfund sind's?

c. Wie viel Einer muß ich zu dem Dreifachen von Fünf setzen, um 17 zu bekommen?

---

*) Vom Neuscheffel = 50 Kannen oder Liter ist erst bei der Zahl 50 die Rede.

Wie viel Einer muß ich aber zu dem Fünffachen von Drei legen, um 17 zu bekommen?

(Antw.: Ebensoviel.)

Wie verhält sich das Vierfache von 4 und das Dreifache von 5 zu der Zahl 17?

Das Vierfache von 4 hat 1 weniger als 17 und das Dreifache von 5 hat 2 weniger als 17.

Ich habe das Vierfache von 4 von 17 abgezogen und gerade so viel erhalten, als ob ich das Doppelte einer anderen Zahl von 17 abgezogen hätte. Welche Zahl habe ich doppelt genommen?

II. 17 Gramm = 1 Neuloth 7 Gr.
17 Groschen = 1 Mark 7 Silbergroschen.
17 Pfund = $8\frac{1}{2}$ Kilogramm.
17 Pfennige, Stück, Monate ꝛc.? Groschen, Dutzend, Jahr.

Früher kaufte man das Pfund Salz um 1 Sgr.; wie viel bekam man da für 1 Mark 7 Sgr.?

Wie viel Kilo waren das? (Acht und ein halbes.)

Karl sollte 8 Pfund Salz holen, das Pfund zu 2 Sgr. Er bekam von der Mutter 1 Zehngroschen-, Fünfgroschen- und Zweigroschenstück. Wie viel Geld brachte er vom Kaufmann zurück?

Vier Brüder sollten sich in 17 Silbergroschen der Art theilen, daß der älteste 1 Groschen mehr bekam, als die übrigen. Wie viel erhielt er und wie viel seine Brüder?

Achtzehnte Stufe.

Die Achtzehn.

I. a.

| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | = 10 + 8 = 18.

Schreibt die Zahl 18 in Punkten, so daß immer 2 zusammenstehen!

• • • • • • • • • •
• • • • • • • •

Wie viel Paare (Zweier) hat der erste Zehner? Wie viel Paare (Zweier) fehlen noch an dem zweiten?

Schreibt die Zahl 18 so, daß immer drei Striche zusammenstehen!

||| ||| |||
||| ||| |||

Wie viel Dreier, wie viel Sechser hat die Achtzehn? Schreibt die Sechser in wagrechter Reihe! Schreibt die Achtzehn in Fünfen!

|||||| • • • • •
|||||| • • • • •
|||||| • • • • •
• • •

Aus welchen 2, 3, 6, 9 gleichen Zahlen besteht die 18?

Aus welchen drei gleichen Zahlen nebst einer ungleichen?
Aus welchen vier gleichen Zahlen nebst einer ungleichen?

b. Wer kann schnell folgende Zahlenwerthe summiren: 2 Zweier, 1 Dreier, noch 2 Zweier, 1 Fünfer und 1 Zweier?
Wie viel ist 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3?
Zählt von 2 aufwärts mit Zunahme von 2 bis 18! (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18).
Ebenso schnell abwärts!
Desgleichen mit 3!

c. Von welcher Zahl ist 18 das Sechsfache?
Wie heißt die Zahl, von welcher 12 das Zweifache, 18 das Dreifache ist?
Welcher Theil ist diese Zahl von 12, von 18?
Um welchen Theil von 12 ist 18 größer als 12?
Welche Zahl muß ich verdreifachen, um 18 zu bekommen?
Um wie viel ist das Doppelte von 9 größer als das Doppelte von 8, von 7, von 6?

II. Die bekannten Währungszahlen.
Wer 18 Pfennige hat, besitzt wie viel Groschen?
Antw.: 1½ Groschen. Denn 18 Pf. = 12 + 6 Pf. 12 Pf. sind 1 Groschen, 6 Pf. ein halber Groschen.

Wenn das Pfund Rindfleisch 6 Sgr. kostet, so kann man für 18 Sgr. wie viel Pfund kaufen?
Fritz sollte vom Fleischer 2 Pfund Rindfleisch und 1 Pfund Kalbfleisch holen und erhielt 18 Silbergroschen für Alles. Für das Rindfleisch rechnete der Fleischer 6 Sgr. 6 Pf. das Pfund, wie hoch hatte er das Pfund Kalbfleisch berechnet?
Wenn 1 Pfund Rindfleisch 6 Sgr. 6 Pf. kostet, so kosten 2 Pfd. 13 Sgr. Es bleiben also von den 18 Sgr. noch 5 Sgr. und da das Geld zureichte für das Pfund Kalbfleisch, so kostete 1 Pfund Kalbfleisch 5 Sgr.
Ein Kind ist 18 Monate alt, also hat es wie viel Jahre?
Antw.: 1½ (ein und ein halbes oder anderthalb). Denn 12 Monate sind 1 Jahr, 6 Monate ein halbes Jahr; ein und ein halbes Jahr sind zusammen anderthalb Jahr.

Neunzehnte Stufe.

Die Neunzehn.

I. a.

| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | = 10 + 9 = 19.

Ein Zehner und neun Einer heißen neunzehn. Es fehlt nur noch 1 Einer, bis der zweite Zehner voll ist.
Schreibt die 19 so, daß immer 2 Striche beisammenstehen!
Nur die Zehn läßt sich in Zweiern ausdrücken, die Neun aber nur in Dreiern.

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • •

Stellt immer fünf Striche zusammen!

| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Wie viel Fünfer stecken in 19?
Wie viel Sechser, Siebener, Achter, Neuner?
Schreibt diese wagrecht untereinander!

u. s. w.

b. Wie viel ist:
$1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$?
$19 - 1 - 2 - 1 - 2$ xc.
Zählt schnell mit 3, mit 4, mit 5 von 19 abwärts!

c. Welche Zahl muß ich 5mal nehmen und welche 3mal, damit ich zusammen 19 erhalte?

Das Dreifache einer Zahl und noch 1 dazu gibt 19. Welche Zahl habe ich verdreifacht?

Ich habe eine Zahl 6mal genommen und noch 1 dazu gethan und 19 erhalten. Welche Zahl habe ich versechsfacht?

Wie lassen sich 19 Aepfel unter 6 Kinder vertheilen, so daß wenigstens fünf gleich viel bekommen?

II. 19 Gramm sind 1 Neuloth und 9 Gramm. Wie viel Gramm fehlen mir an 2 Neuloth, wenn ich 19 Gramm habe?

Gustav hatte 2 Mark, Georg nur 1 Mark 9 Sgr.; wie viel hatte dieser weniger?

Ein Postpaket wog 10 Kilogramm; als man die Umhüllung (Emballage) wegnahm, wog es 1 Pfund weniger; wie viel volle Kilogramme waren nun noch da? Und wie viel Pfund im Ganzen?

Zu einem Mantel wurden 3 Meter feines Tuch gekauft, das Meter zu 6 Thaler. Dazu ein Sammetkragen zu 1 Thaler. Wie viel mußte zusammen dafür bezahlt werden?

Mein kleiner Bruder, sagte Anna, ist $1\frac{1}{2}$ Jahr alt; und meiner, sagte Bertha, ist gerade 1 Monat älter; wie viel Monate war dieser alt; und wie viel über 1 Jahr.

Zwanzigste Stufe.

Die Zwanzig.

I. a. | | | | | | | | | | / | | | | | | | | | | $= 10 + 10 = 20$.

Nun haben wir 2 volle Zehner oder 2 Zig. Man sagt aber nicht zwei-zig, sondern zwanzig.

Zeigt mir 20 Finger! Wie oft müßt ihr beide Hände erheben?
Hier sind 20 Stäbchen. Wie viel Zehnerbündel können wir da-

von machen. Wir binden sie beide zusammen, und haben nun welche Zahl?

Schreibt 20 so, daß immer 2 Striche zusammenstehen!

Wie viel Vierer sind das?

Der Zehner läßt sich in 2 gleiche Theile zerlegen, also 20 in wie viel?

Schreibt diese Fünfer alle senkrecht unter einander!

. . . . .
. . . . . $4 \times 5 = 20.$
. . . . .
. . . . .

Wie viel Punkte stehen wagrecht neben einander? Wie viel senkrecht untereinander? Nun wollen wir in jede Reihe 4 Punkte schreiben, wie viel Reihen kommen da untereinander?

. . . .
. . . .
. . . . $5 \times 4 = 20.$
. . . .
. . . .

Aus welchen gleichen Zahlen besteht 20?

20×1, 10×2, 5×4, 4×5, 2×10.

Von welcher Zahl ist 20 das Zweifache oder Doppelte; von welcher das Vierfache, von welcher das Fünffache, das Zehnfache?

Welcher Theil von 20 ist 2, 4, 5, 10?

2 ist der zehnte Theil oder ein Zehntel von 20; 4 ist der fünfte Theil oder $\frac{1}{5}$ von 20 2c.

Zusammenzählen und Abziehen mit 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6 (In welchem Zehner sind wir? Wie viel Einer fehlen noch, bis der erste Zehner voll ist? . . 10 . (Wie viel mal haben wir jetzt die Eins gesetzt, genommen?) 11, 12, 13, 14, 15 (Wie viel mal 1 haben wir jetzt im 2ten Zehner, wie viel im Ganzen? Wie viel mal müssen wir noch die Eins nehmen, um den 2ten Zehner voll zu bekommen?)

$$20 \times 1 = 20.$$

20, 19, 18, 17 (Halt! wie viel Einer müssen wir noch wegnehmen, bis wir auf den ersten Zehner zurückkommen?) u. s. w.

$$1 : 20 = 20 \text{ mal.}$$

Ich kann die 1 von der 20 zwanzigmal wegnehmen, oder die 1 steckt 20mal in 20.

Nun Messen mit 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12 (Wie viel mal 2 haben wir jetzt?) 14, 16 (Wie viel jetzt?) 18, 20.

$$10 \times 2 = 20.$$

20, 18, 16 u. s. w.

$$2 : 20 = 10 \text{ mal.}$$

Messen mit 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18 — (Wie viel Einer müssen wir noch hinzuthun, um 20 zu bekommen?) 20.

$$6 \times 3 + 2 = 20.$$

Wie oft kann ich also 3 von 20 wegnehmen?

So oft wir 3 wegnehmen, wollen wir einen Finger abzählen.

20, 17, 14, 11, 8, 5, — 2.

$$3 : 20 = 6\ (2)$$

u. s. f.

Schriftlich:

$20 = 20 \times 1.$	$1 : 20 = 20.$
$10 \times 2.$	$2 : 20 = 10.$
$6 \times 3\ (2).$	$3 : 20 = 6\ (2).$
$5 \times 4.$	$4 : 20 = 5.$
$4 \times 5.$	$5 : 20 = 4.$
$3 \times 6\ (2).$	$6 : 20 = 3\ (2).$
$2 \times 7\ (6).$	$7 : 20 = 2\ (6).$
$2 \times 8\ (4).$	$8 : 20 = 2\ (4).$
$2 \times 9\ (2).$	$9 : 20 = 2\ (2).$
$2 \times 10.$	$10 : 20 = 2.$

b. Wie viel ist: $(2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$?

Wie viel ist $(3 \times 2) + (3 \times 2) + (3 \times 2)$ weniger als 20?

Zieht von 20 ab 4, 3, 2, 1 und noch einmal 4, 3, 2, 1; wie viel bleibt?

Von 20 weggenommen 13, weggenommen 6, bleibt?

Von 20 weggenommen 11? 9? 8?

Wie viel Dutzend und Stück sind 20 Stück?

Zu 1 Mandel zähle 2 und 2 und 1 Stück, wie viel Dutzend und Stück?

c. Das Vierfache von 5 ist gleich dem Zweifachen welcher Zahl?

Das Vierfache von 5 ist gleich dem Vierfachen welcher Zahl?

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen dem Vierfachen von 5 und dem Vierfachen von 4?

Ein Gärtner hatte 20 Aepfel und vertheilte sie so, daß er jedem seiner Kinder gleich viel gab und noch 2 für Nachbars Fritz zurücklegte. Wie viel hatte jedes Kind bekommen?

Wenn der Gärtner für Nachbars Fritz 2 Aepfel zurücklegte, so hatte er noch 18. Diese in 3 gleiche Theile getheilt 2c.

II. 20 Stück ? Mandel.

20 Pfennige ? Groschen.

20 Silbergroschen ? Mark.

1 österreichischer Silbergulden hat 20 Sgr., also wie viel Mark? Wie viel Gulden ist 1 Mark?

1 Schweizer Franken hat 8 Sgr., ist also wie viel geringer als 1 Mark? Wie viel Franken stecken in 1 Gulden?

Erstlich 2 Franken; 2 × 8 Sgr. = 16 Sgr., bleiben noch 4 Sgr., diese sind gerade die Hälfte eines Frankens oder ½ Frank. Also stecken in einem Gulden 2½ Frks.

20 Meter ? Dekameter.
20 Gramm ? Neuloth.
20 Zollpfund ? Kilogramm.
20 Schoppen ? Kannen.
20 Neuscheffel ? Faß.
1 Faß oder Hektoliter hat 2 Neuscheffel.

20 Buch Papier nennt man 1 Rieß. Wie viel Rieß sind 10 Buch?

1 Ballen Papier hat 10 Rieß; wie viel Ballen sind 20 Rieß? Wie viel Ballen aber 5 Rieß?

Antw.: Ein halber Ballen.

Was kostet 1 Faß (Hektoliter) Getreide, wenn der Neuscheffel 10 Mark kostet?

Wie viel Pfund Kirschen kann man für 2 Mark kaufen, wenn das Pfund 4 Sgr. kostet?

2 Mark = 20 Sgr. Da 4 Sgr. in 20 Sgr. 5mal enthalten sind, so kann man auch 5mal 1 Pfund erhalten.

Wie viel aber, wenn das Pfund 5 Sgr. kostet?

Wie viel Neuloth erhält man für 1 Gulden, wenn das Gramm 2 Sgr. kostet?

1 Gulden hat 20 Sgr. Da 2 Sgr. in 20 Sgr. 10mal enthalten sind, so kann ich für 20 Sgr. auch 10mal 1 Gramm, also 10 Gramm oder 1 Neuloth bekommen.

Wie viel Dekameter Tuch bekommt man für 20 Thaler, wenn das Meter 2 Thlr. kostet?

Da 2 Thlr. in 20 Thlr. 10mal enthalten sind, so bekomme ich für 20 Thlr. auch 10 × 1 Meter oder ein Dekameter.

Ein Dekameter, d. h. zehn Meter, können wir mit dem deutschen Worte Kette bezeichnen. Meter mit dem deutschen Worte Stab.

Ich hatte vom Seiler 1 Kette starken Bindfaden mitgenommen und dafür 1 Sgr. 8 Pf. bezahlt; wie viel kostete 1 Meter oder Stab?

1 Kette = 10 Meter. (1 Sgr. 8 Pf. = 20 Pf.) Kosten 10 Meter 20 Pf., so kostet 1 Meter den zehnten Theil von 20 Pf. = 2 Pfennige.

Vom schwächeren Bindfaden ließ ich noch 2 Ketten oder Dekagramm holen und bezahlte dafür ebenfalls 1 Sgr. 8 Pf. Wie viel kostete von dieser Sorte der Stab?

2 Ketten = 20 Meter. 1 Sgr. 8 Pf. = 20 Pfennige. Kosten 20 Meter 20 Pf., so 2c.

In dieser Weise wird nun jede folgende Zahl behandelt, und der Lehrer wird nun im Stande sein, den Lehrgang selbst weiter zu führen. Wir rathen übrigens sehr zu einer schriftlichen Präparation, etwa auf je einen Zehner — damit nichts von dem behandelten Stoffe unbenutzt

liegen bleibe, und der Schüler auf die zweckmäßigste Weise zum Selbstbilden der Aufgaben veranlaßt werde. Die Währungszahlen 24, 30, 50, 60 ꝛc. werden für das angewandte Rechnen längeren Aufenthalt darbieten, während bei der 23, 29 ꝛc. mehr bloß das reine Zahlenverhältniß beachtet wird. Wir theilen bloß noch einige Stufen mit.

Dreißigste Stufe.

Die Dreißig.

(3mal 2 Hände.)

I. a. „Wenn ich zu 29 noch 1 Einer setze, so wird der dritte Zehner voll."

„Drei Zehner zusammengenommen nennt man Dreißig."

Messen mit 1:

Aufwärtszählen mit 1 im Chor:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (Halt! Ein Schüler spricht: Wir sind im 1sten Zehner, es fehlen noch 3 Einer, bis der erste Zehner voll ist, und noch 20 Einer an 30.)

8, 9, 10, 11 — (wir sind im 2ten Zehner ꝛc.) u. s. f.

30 × 1 = 30.

Abwärtszählen:

30, 29, 28 — (wir sind im 3ten Zehner, vom 3ten Zehner sind 2 Einer weggenommen) u. s. f.

1 : 30 = 30.

Messen mit 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 — (wir sind im 2ten Zehner, es fehlen noch 3 Zweier, bis der 2te Zehner voll ist, und noch 5 Zweier, bis der 3te Zehner voll ist) ꝛc.

15 × 2 = 30.

Abwärtszählen mit 2:

30, 28, 26, 24 — (wir sind im 3ten Zehner, haben 3 Zweier vom 3ten Zehner weggenommen, bleiben noch 2 Zweier im 3ten Zehner übrig).

2 : 30 = 15.

u. s. f. bis

Messen mit 10:

10 + 10 = 20, 20 + 10 = 30.

3 × 10 = 30.

30 — 10 = 20, 20 — 10 = 10.

10 : 30 = 3.

Schriftlich:

 3 × 10 = 30.

30 = 30 × 1. 1 : 30 = 30.
15 × 2. 2 : 30 = 15.
10 × 3. 3 : 30 = 10.
7 × 4 (+ 2). 4 : 30 = 7 (2).
6 × 5. 5 : 30 = 6.
5 × 6. 6 : 30 = 5.
4 × 7 (+ 2). 7 : 30 = 4 (2).
3 × 8 (+ 6). 8 : 30 = 3 (6).
3 × 9 (+ 3). 9 : 30 = 3 (3).
3 × 10. 10 : 30 = 3.

Man lasse hierbei die Striche abtheilen, also nach Zweiern:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 30 = 15 × 2.

nach Dreiern:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Mündlich:

30 = 29 + 1, 28 + 2, 27 + 3 ꝛc.

Dann:

30 = 30 × 1 (das 30fache von) 1 = $\frac{1}{30}$ × 30 (der 30ste Theil).
15 × 2 2 = $\frac{1}{15}$ × 30.
10 × 3 3 = $\frac{1}{10}$ × 30.
6 × 5 5 = $\frac{1}{6}$ × 30.
5 × 6 6 = $\frac{1}{5}$ × 30.
3 × 10 10 = $\frac{1}{3}$ × 30.
2 × 15 15 = $\frac{1}{2}$ × 30.

Aus welchen gleichen Zahlen besteht 30?
Aus welchen 2, 3, 4, 5, 6 ungleichen Zahlen?

b. 1 Mandel + 2 Stück + 4 St. + 1 St. + 8 St. sind wie viel Stück (Mandel)?

1 Groschen und 3 und 5 und 7 und 3 Pfennige sind wie viel Pfennige?

Davon werden ausgegeben 1 Sechser und 2 Dreier, und 7 und 8 Pfennige. Es bleiben?

3 × 5 + 2 × 4 + 7 — 15 — 8 + 5 + 9.

Die Antwort muß immer augenblicklich da sein!

4 × 6, die Hälfte, wieder die Hälfte, 5mal genommen gibt? ꝛc.

c. Vermindere 30 um 19!

19 = 10 + 9, 30 — 10 = 20, 20 — 9 = 11. 30 um 19 vermindert ist 11.

Wie erhältst du das Doppelte von 15?

13 = 1 Zehner und 5 Einer. 2 × 1 Z. = 2 Z. 2 × 5 E. = 10 E. = 1 Z. 2 Z. + 1 Z. = 3 Z. = 30.

Vergleiche 30 mit 16!

30 = 3 Z. 16 = 1 Z. + 6 E. Ich muß zu den 6 E. noch 4 E. thun, um den 2ten Z. voll zu machen, und noch 1 Z., um 3 Z. zu erhalten. Also hat 30 1 Z. + 4 E. = 14 mehr als 16, und 16 ist um 1 Z. + 4 E. oder um 14 kleiner als 30.

Das Zehnfache von 3 ist eben so groß als das Sechsfache welcher Zahl?

Das Zehnfache von 3 = 10 × 3 = 30. 30 ist aber das Sechsfache von 5, also ꝛc.

Wie ist 30 aus 7 entstanden?

Da 7 in 30 4mal enthalten ist mit dem Reste von 2, so muß ich 7 4mal nehmen und 2 hinzuthun, um 30 zu bekommen.

Wenn ich von einer Zahl das 3fache von 5 abziehe, erhalte ich das 5fache von 3. Welches ist die Zahl?

Die Fragezahl muß gleich sein dem 3fachen von 5 + dem 5fachen von 3, oder 15 + 15 = 30.

II. 30 Meter = 3 Ketten oder Dekameter.
30 Gramm = 3 Neuloth oder Dekagramm.
30 Liter = 3 Dekaliter.
30 Schoppen = 15 Liter oder Kannen.
30 Silbergroschen = 3 Mark = 1 Thaler.
30 Pfennige = 3 sächsische Neugroschen = 2 Sgr. 6 Pf.
30 Stück = 2 Mandel = 2 Dutzend 6 Stück oder $2\frac{1}{2}$ Dutzend.
30 Tage = 1 Monat = 4 Wochen 2 Tage.
30 Monat = 2 Jahr 6 Monate = $2\frac{1}{2}$ Jahr.
30 Buch Papier = 1 Rieß 10 Buch = $1\frac{1}{2}$ Rieß.
30 Rieß = 3 Ballen.
30 Neuscheffel = 15 Faß.

Vergleichung von Silbergroschen und Gutegroschen.

30 Silbergroschen = 24 gute Groschen = 1 Thaler.
Der 6te Theil vom Thaler also = 5 Sgr. = 4 gute Gr.

| | | | | | = ...
| | | | | | = ...
| | | | | | = ...
| | | | | | = ...
| | | | | | = ...
| | | | | | = ...

1 Viergutegroschenstück hat 5 Sgr.
2 Viergutegr. = 1 Achtgutegr. = 10 Sgr.
3 Viergutegr. = 12 g. Gr. = $\frac{1}{2}$ Thlr. = 15 Sgr.
4 Viergutegr. = 16 g. Gr. = 1 Gulden = 20 Sgr.
5 Viergutegr. = 20 g. Gr. = 25 Sgr.

Wie viel Einer stehen senkrecht untereinander? Schreibt diese Fünfer in wagerechten Linien unter einander! Theilt die Zehner durch Querstriche ab! Schreibt 50 in Zweiern; wie viel kommen unter einander? ꝛc.

Mündlich und schriftlich:

50 = 50 × 1.	1 : 50 = 50.
25 × 2.	2 : 50 = 25.
16 × 3 (2).	3 : 50 = 16 (2).
12 × 4 (2).	4 : 50 = 12 (2).
10 × 5.	5 : 50 = 10.
8 × 6 (2).	u. s. w.
7 × 7 (1).	
6 × 8 (2).	
5 × 9 (5).	
5 × 10.	

b. (Schnellrechnen):

2 Stück + 5 Stück + 6 Stück + 7 Stück 2mal genommen und noch 10 Stück?

Wie viel Stück, Mandel, Dutzend?

Wie viel Sgr. sind 1 Mark, 1 Gulden, 1 Viergutegroschenstück, 2mal 5 Sgr. und noch 5 Sgr.?

c. Der 5te Theil von 50 ist das Doppelte von welcher Zahl?
Die Hälfte von 50 ist das Fünffache von welcher Zahl?
Wie verhält sich das Fünftel von 50 zum Fünftel von 25?
Das Fünftel von 50 ist das Doppelte vom Fünftel von 25.

Das Fünftel von 25 steht in gleichem Verhältniß zum Fünftel von welcher Zahl? (Das Fünftel von 25 ist das Doppelte von welcher Zahl?)

II. 50 Meter ? Dekameter.
50 Buch ? Rieß.
50 Rieß ? Ballen.
50 Stück ? Mandel und Dutzend.
50 Pfennige ? Groschen.
50 Silbergroschen ? Thaler, Mark, Gulden.
50 Tage ? Monate u. s. w.
50 Neuloth = 1 Pfund.
50 Kilogramm = 1 Centner.
50 Liter = 1 Neuscheffel.

Wie viel Neuloth gehen auf $\frac{1}{2}$ Pfund, wie viel Kilogramm auf $\frac{1}{2}$ Centner, wie viel Liter auf $\frac{1}{2}$ Neuscheffel?

Wenn das Pfund mit 1 Thaler 20 Sgr. bezahlt wird, so kostet 1 Neuloth?

Ein Neuscheffel Korn wurde mit 5 Mark bezahlt, wie hoch kam 1 Liter?

5 Meter Seidenband kosteten 4 Sgr. 2 Pf., wie viel ein halbes Meter?*)

4 Sgr. 2 Pf. = 50 Pf. Kosten 5 Meter 50 Pf., so kostet 1 Meter 10 Pf., ein halbes Meter 5 Pfennige.

Eine Hausfrau ließ 1 Centner Schmelzbutter kommen und gab davon der Nachbarin 20 Kilogramm ab, zum Einkaufspreise. Die Nachbarin zahlte 10 Gulden, wie viel Mark kostete der Centner?

1 Centner = 50 Kilogramm. 10 Gulden = 20 Mark. Wurden für 20 Kilogramm 20 Mark bezahlt, so kostete 1 Kilogramm 1 Mark, der Centner 50 Mark.

Wie viel Thaler und wie viel Gulden waren das?

Wenn 1 Pfund 50 Neuloth hat, so gehen wie viel Neuloth auf $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ Pfund? wie viel auf $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$ Pfund?

Wenn 1 Pfund 1 Thlr. 20 Sgr. kostet, so kosten $\frac{9}{10}$ Pfund?

1 Thlr. 20 Sgr. sind 50 Sgr. Wenn 1 Pfd. 50 Sgr. kostet, so kostet $\frac{1}{10}$ Pfund den 10ten Theil von 50 Sgr. = 5 Sgr.; $\frac{9}{10}$ Pfd. kosten 9 × 5 Sgr. = 45 Sgr. = 1 Thlr. 15 Sgr.

Die Zahl

Sechzig

erfordert wieder längeren Aufenthalt.

10 Sechskreuzerstücke = 1 Gulden rheinisch,
5 „ = $\frac{1}{2}$ „ „

Sind 60 Kreuzer = 1 Gulden rheinisch, welcher Theil vom Gulden sind da 30 Kreuzer? 15 Kreuzer? 10 Kreuzer?

Wie oft steckt 1 Kreuzer in 1 Gulden?

Also ist 1 Kreuzer welcher Theil des Guldens?

Welche Theile vom Gulden sind 2 Kreuzer, 3 Kr., 4 Kr., 5 Kr.?

Wie viel Kreuzer hat 1 Gulden mehr als 1 Mark?

Da 1 Mark = 36 Kr., so muß ich noch so viel Kreuzer zulegen, bis ich 60 Kr. bekomme. 36 + 4 = 40; 40 + 20 = 60. Es fehlen also noch 24 Kr. bis der Gulden voll ist, also hat 1 Gulden 24 Kr. mehr als 1 Mark.

Hier ist 1 östreichisches Guldenstück und hier 1 bayerisches Guldenstück. Welches hat mehr Werth?

1 östr. Gulden = 2 Mark = 20 Sgr.
1 bayer. Gulden = 1 Mark + 24 Kreuzer.

Wie viel Silbergroschen sind aber 24 Kreuzer?

Wir wissen, daß 5 Sgr. oder 4 gute Gr. = 18 Kr. und 5 Sgr. = 60 Pfennige. Wir brauchen nur noch zu wissen, wie viel Silbergroschen und Pfennige 6 Kr. sind. Da 6 Kr. der 3te Theil von 18 Kr., so sind sie auch der dritte Theil von 60 Pfennigen = 20 Pf. = 1 Sgr. 8 Pf. Folglich sind 24 Kr. = 6 Sgr. 8 Pf.

Ist 1 bayerischer Gulden = 1 Mark + 6 Sgr. 8 Pf., so ist er = 16 Sgr. 8 Pf.

Wie viel hat also der östr. Gulden mehr?

Da 1 östr. Gulden = 20 Sgr., so muß ich zu 16 Sgr. 8 Pf. noch 4 Pf. und 3 Sgr. oder 3 Sgr. 4 Pf. zulegen, um 1 östr. Gulden zu bekommen. Der östr. Gulden hat also 3 Sgr. 4 Pf. mehr als der bayerische Gulden.

---

*) Die Metereintheilung nach dem Dezimalsystem wird bei der Zahl 100 eingeführt.

Hier habe ich einen preußischen Thaler, einen östreichischen Gulden und einen bayerischen Gulden. Nun sag' mir, wie viel das eine Geldstück mehr werth ist, als das andere?

Wie viel Mark, wie viel östr. Gulden sind 2 Thaler?

Wenn man 3 Kilogramme Kaffee mit 2 Thaler bezahlt, wie viel Mark kostet 1 Pfund?

3 Kilogr. = 6 Pfund. 2 Thlr. = 60 Sgr. Kosten 6 Pfund 60 Sgr., so kostet 1 Pfund den 6ten Theil von 60 Sgr. = 10 Sgr. oder 1 Mark.

Wie viel Pfund Brod kann man für 2 Thaler kaufen, wenn das Kilo 5 Sgr. kostet?

Kostet das Kilo 5 Sgr., so kann man so viel Kilo kaufen, als 5 Sgr. in 60 Sgr. enthalten sind; also 12 Kilo = 24 Pfund.

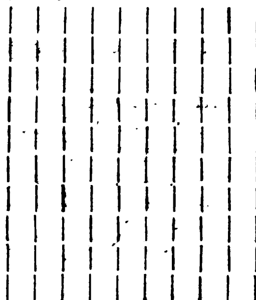
60 Pfund ? Kilo.
60 Gramm ? Neuloth.
60 Stück ? Dutzend und Mandel.
60 Tage ? Monate.
60 Monate ? Jahre.
60 Buch ? Rieß.
60 Rieß ? Ballen 2c.

Hundertste und letzte Stufe des ersten Kursus.

Die Zahl Hundert.

I. a. Das Auf- und Abzählen mit den Zahlen von 1 bis 10, und sowohl von 1 als 2 angefangen, muß ohne allen Anstoß, schnell und sicher von Statten gehen. Beim Chorzählen mag der Lehrer öfter halten lassen, und die bekannten Fragen stellen.

Schriftliches Schema:



$10 \times 10 = 100.$

$100 = 100 \times 1.$	$1 : 100 = 100.$
$50 \times 2.$	$2 : 100 = 50.$
$33 \times 3 \ (+ 1).$	$3 : 100 = 33 \ (1).$
$25 \times 4.$	$4 : 100 = 25.$
$20 \times 5.$	$5 : 100 = 20.$
$16 \times 6 \ (+ 4).$	$6 : 100 = 16 \ (4).$
$14 \times 7 \ (+ 2).$	$7 : 100 = 14 \ (2).$

100 = 12 × 8 (+ 4). 8 : 100 = 12 (4).
11 × 9 (+ 1). 9 : 100 = 11 (1).
10 × 10. 10 : 100 = 10.

100 = 99 + 1, 98 + 2, 97 + 3 ꝛc. bis 1 + 99.

Muß ebenfalls ohne allen Anstoß und schnell hintereinander hergesagt werden.

100 ist das 100fache von 1. 1 ist der 100ste Theil von 100.
50fache von 2. 2 ist der 50ste Theil von 100.
25fache von 4. 4 ist der 25ste Theil von 100.
20fache von 5. 5 ist der 20ste Theil von 100.
5fache von 20. 20 ist der 5te Theil von 100.
2fache von 50. 50 ist der 2te Theil von 100.

b. Das Einmaleins hat sich im Laufe der Uebungen von selbst ergeben, und mag hier im Zusammenhange repetirt werden. Der Lehrer kann von den Schülern die sogenannte Pythagoräische Tafel anfertigen lassen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Dieses Täfelchen und folgende Reihen sind die einfachste Darstellung des Einmaleins:

2 mal 1 ist 2; 2 mal 2 ist 4; 2 × 3 = 6 u. s. w.
3 " 1 " 3; 3 " 2 " 6; 3 × 3 = 9 ꝛc.
4 " 1 " 4; 4 " 2 " 8; 4 × 3 = 12 ꝛc.
bis
10 × 1 = 10; 10 × 2 = 20 ꝛc. ꝛc. 10 × 10 = 100.

Der Schüler lerne hier den Satz erkennen, daß das Produkt dasselbe bleibt, wenn man dieselben Faktoren, gleich viel in welcher Reihe, multiplicirt.

Außerdem sind die 4 Spezies mit den Zahlen über 10 zu rechter Fertigkeit zu bringen, und dann verschiedentlich zu kombiniren. Wir setzen einige Beispiele her.

α. (Addiren.) 14 + 13 + 12 + 11.
15 + 17 + 19 + 18.
25 + 37 + 39 + 17 ꝛc.

β. (Subtrahiren.) 90 — 16 — 12 — 11.
98 — 32 — 41 — 24.
90 — 16 — 17 — 28 — 29 ꝛc.

γ. (Multiplizieren.) 3 × 30, 4 × 22, 2 × 44, 2 × 27, 3 × 25,
4 × 18, 12 × 5, 33 × 2, 35 × 2 ꝛc.

δ. (Dividiren.) 3 : 60, 3 : 69, 3 : 72, 3 : 96,
4 : 60, 4 : 72, 4 : 84, 4 : 96,
12 : 84, 13 : 65, 18 : 72, 19 : 95,
4 : 53, 5 : 62, 9 : 32, 18 : 40.

ε. (Kombiniren.) Der Lehrer schreibt eine Reihe Ziffern an die Tafel, die ersten 2 durch einen Stock bezeichneten werden addirt oder multiplizirt, von dieser Summe oder diesem Produkte die Summe der zwei darauf bezeichneten abgezogen.

Aufgaben wie diese müssen schnell gelöst werden!
3 × 29 — 4 × 16 + 7 : 10 × 9 × 3?

Der Lehrer rechne jederzeit die Aufgaben mit, welche er gibt. Das gilt für den ganzen Rechenunterricht, und ist von der größten Bedeutung.

Als Prüfstein, ob jede Zahl zur klaren Vorstellung des Schülers gekommen ist, diene nun die Uebung, daß der Schüler die Zahlen von 1 bis 100 mit zwei ihrer Faktoren nennt; die Primzahlen werden bloß mit 1 gemessen. Wenn er mehrere Faktoren anzugeben weiß, wird das willkommen geheißen. Also:
1 × 1, 2 × 1, 3 × 1, 2 × 2, 5 × 1, 3 × 2 oder
2 × 3, 7 × 1, 4 × 2 oder 2 × 4, 3 × 3 ꝛc.

Es ist für die Folge sehr wichtig, daß der Schüler Zahlen wie 52, 68, 95 ꝛc. als 4 × 13, 4 × 17, 5 × 19 ꝛc. parat habe.

Darum mögen von den Schülern folgende Reihen entworfen und fest eingeprägt werden:

2 × 11 = 22	2 × 12 = 24	2 × 13 = 26
3 × 11 = 33	3 × 12 = 36	3 × 13 = 39
4 × 11 = 44	4 × 12 = 48	4 × 13 = 52
5 × 11 = 55	5 × 12 = 60	5 × 13 = 65
u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.
× 14 u. s. w.	bis	5 × 19 = 95.

Dann werde aber auch die Tabelle der Primzahlen und einfachen Faktoren aufgestellt:

1 Primzahl
2 „ „
3 „ „

4 = 2 . 2.
5 Primzahl
6 = 2 . 3.
7 Primzahl
8 = 2 . 2 . 2
9 = 3 . 3
10 = 2 . 5
11 Primzahl
12 = 2 . 2 . 3
13 Primzahl
14 = 2 . 7
15 = 3 . 5
16 = 2 . 2 . 2 . 2
17 Primzahl
18 = 2 . 3 . 3
19 Primzahl
30 = 2 . 2 . 5.
u. s. f. bis 100 fest einzuüben.

c. Von 100 Thalern gab Jemand aus den 4ten Theil, und vom Reste den 3ten Theil; welchen Theil von der ganzen Summe behielt er noch?

Der 4te Theil von 100 Thlrn. = 25 Thlr. Wer von 100 Thlrn. 25 Thlr. ausgibt, behält noch 75 Thlr. Wird von dieser Summe noch der 3te Theil = 25 Thlr. weggenommen, so bleiben noch 50 Thlr. übrig. 50 Thlr. ist aber ein halbes Hundert.

Ich habe eine Zahl 3 mal genommen, und 4 mehr bekommen als ein halbes Hundert. Welche Zahl habe ich verdreifacht?

Die Zahl, welche 4 mehr ist, als ein halbes Hundert, ist 54. Ist 54 das Dreifache einer Zahl, so ist diese der dritte Theil von 54 = 18.

Von welcher Zahl ist das Fünffache um 5 Einer kleiner als 100?

Die Zahl, welche 5 Einer weniger hat, als 100, ist 95. Ist 95 das Fünffache einer Zahl, so steckt diese 5 mal in 95, oder ist der 5te Theil von 95 = 19.

75 ist das Dreifache des vierten Theils von welcher Zahl?

75 ist = 3 × 25; ist 25 der 4te Theil einer Zahl, so ist diese 4 × 25 = 100. Also ist 75 das Dreifache des 4ten Theils von 100.

II. 100 Sgr. ? Thaler, Gulden, Mark.
100 gute Groschen ? Thaler und Groschen.
100 Pfennige ? Groschen (nach 10= und 12theiligem Maß).
100 Meter ? Ketten (Dekameter).
100 Gramm ? Neuloth (Dekagramm).
100 Liter ? Dekaliter.
100 Schoppen ? Liter.
100 Stück ? Schock, Mandel und Dutzend.
100 Neuscheffel ? Faß.
100 Liter ? Scheffel.
(1 Scheffel = 50 Liter.)
100 Liter nennt man 1 Hektoliter = 1 Faß.
100 Buch ? Rieß.

100 Rieß ? Ballen.
100 Neuloth ? Pfund.
100 Kilogramm ? Centner.
100 Tage ? Monate, Wochen.
100 Monate ? Jahre.
Wie viel Liter gehen auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$ Hektoliter?
$\frac{3}{4}$ Hektoliter ? Liter.

Wie viel Liter fehlen mir noch an 1 Hektoliter, wenn ich $\frac{3}{4}$ Hektoliter oder Faß habe?

In einen Sack geht gerade 1 Hektoliter Korn, in einen andern $1\frac{1}{2}$ Scheffel. Wie viel Liter (Scheffel) in den einen mehr?

Wie viel Neuloth sind $1\frac{1}{2}$ Pfund? Wie viel Neuloth fehlen noch am 2ten Pfund?

Karl mußte 3 Packete auf die Post tragen, das erste wog 1 Pfund, das zweite 10 Neuloth, das dritte 40 Neuloth. Wie viel alle zusammen?

Nun kann auch die Metereintheilung vorgeführt werden.

Der Lehrer bringt den Meterstab, auf welchem Decimeter und Centimeter eingeschnitten sind, in die Klasse, läßt mit dieser Leiste die Schultafeln messen (ein Kreidestrich theilt ab), auch an die Schüler selbst wird das Metermaaß gelegt, ferner bemerkt, wie sich die Länge der Lineale zum Meter verhält.

Die kleinsten Lineale sollten 10 Centimeter oder Neuzoll, größere das Drei- und Vierfache betragen und auch die Centimeter markirt sein.

Ein Meter, in 10 gleiche Theile getheilt, hat 10 Decimeter.

Der Lehrer zeichnet 1 Meter in vollständiger Länge an die Wandtafel und theilt ihn in 10 gleiche Theile.

Zeigt mir 1, 2, 3, 4 rc. Decimeter!

Nun wollen wir das Decimeter wieder in 10 gleiche Theile theilen. Wie viel solcher Theile kommen auf das Meter? Man nennt den 100sten Theil des Meters 1 Centimeter (Neuzoll). Welcher Theil vom Decimeter ist ein Centimeter? Welcher Theil vom Meter?

Wie viel Neuzoll hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Meter?
Wie viel Decimeter sind $\frac{3}{5}$ Meter, $\frac{4}{5}$ Meter, $\frac{3}{10}$ Meter?
Wie viel Centimeter sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$ Meter?
Wie viel Centimeter sind $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{25}$ Meter?
Vier Decimeter sind wie viel Centimeter?
Wie viel Centimeter sind 6, 7, 8, 9 — wie viel $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$ Decimeter?

Damit sich die Kinder zeitig daran gewöhnen, den verkleinerten Maaßstab auf die wirkliche Größe zu beziehen, so lasse der Lehrer einen Strich auf die Schiefertafel ziehen: der soll ein Meter vorstellen. Theilt diesen Strich in zehn Theile! Wie wird nun ein solcher Theil heißen?

Wenn aber dieser Theil 1 Meter vorstellte, wie viel würde der ganze Strich betragen? (Eine Kette.)

Auch die Kette ist an einem starken Bindfaden zu veranschaulichen und es können die Knoten daran die Meter abtheilen. Sehr wünschenswerth wäre es, wenn in jeder Schule eine Tafel aufgehängt wäre, auf welcher das neue Maaß und Gewicht in natürlicher Größe dargestellt ist. Ich empfehle: Große Wandtafel des metrischen Systems als Anschauungsmittel bearbeitet von C. Bopp (Stuttgart bei Jul. Maier). Nebst Text Preis: 1 Thlr.

Schreibt untereinander: und nennt beim Zusammenzählen gleich die Groschen, also von oben: 9 Pf., 1 Gr. 5 Pf., 2 Gr. 2c.; ebenso von unten. Dann zieht von der Summe die einzelnen Posten ab,

9 Pf.	1 Gr.	6 Pf.
8 =	1 =	4 =
7 =	1 =	2 =
11 =	1 =	10 =
6 =	1 =	— =
10 =	1 =	8 =
3 =	— =	6 =
4 =	— =	8 =

also: 4 Gr. 10 Pf. — 9 Gr. 8 Pf.
4 Gr. 3 Pf., 3 Gr. 5 Pf. 2c.

Dann setzt neben jeden Posten sein Zweifaches, und theilt die Summe durch 2.

Ein Bauer brachte 5 Gänse zu Markte, wofür er 3 Thlr. 10 Sgr. löste. Wie theuer verkaufte er das Stück?

Eine Frau wollte aus einem Stück Leinwand von 100 Ellen Hemden machen lassen, und zwar größere und kleinere. Zu diesen wollte sie nur $\frac{1}{5}$ des ganzen Vorraths verwenden, und es sollten 4 Ellen auf 1 Hemde kommen, während auf das größere 5 Ellen. Wie viel Stück von jeder Art erhielt sie?

Zu den kleineren Hemden sollte $\frac{1}{5}$ von 100 Ellen = 20 Ellen kommen, und da auf eins 4 Ellen genommen werden sollten, so konnten 5 Stück von dieser Sorte gemacht werden. Für die größeren Hemden blieben 100 — 20 = 80 Ellen übrig. Da auf eins 5 Ellen kamen, so konnten so viel Hemden daraus gemacht werden, als 5 in 80 enthalten ist = 16 Hemden.

Auf ein kleines Feld wurden 25 Liter Hafer gesäet und nur 1 Hektoliter geerntet. Wie vielfach hatte man geerntet?

Karl mußte vier Werthpackete auf die Post tragen, von denen das erste ein halbes Pfund, das zweite 1 Pfund, das dritte 10 Neuloth, das vierte 15 Neuloth wog. Er bezahlte für alle zusammen 3 Thlr. 10 Sgr. Porto; wie viel Porto kam im Durchschnitt auf 1 Loth?

Wenn das Schock Eier 3 Thaler 10 Sgr. kostet, so bezahlt man wie viel für 1 Mandel?

3 Thlr. 10 Sgr. = 100 Sgr. 1 Schock = 4 Mandel. Kosten 4 Mandel 100 Sgr., so kostet 1 Mandel den 4ten Theil von 100 Sgr. = 25 Sgr.

Zweiter Kursus.

I.

Das Rechnen mit den Zahlen über 100.

Drittes Jahr.

Erstes Semester.

Rechnen im Zahlraum von 100 bis 1000.

(Denkrechnen.)

Vorbemerkungen.

1) Da alles fernere Rechnen nur Anwendung von der Anschauung der Zahlen des ersten Hunderts ist, so kann auch dieser nun folgende Kursus keinen andern Zweck haben, als die Zahlen von 100 bis 1000 auf die des ersten Hunderts zurückzuführen, d. h. sie in ihre Elemente zu zerlegen;

2) damit erhält der Schüler zugleich das Geheimniß alles sicheren und schnellen Kopfrechnens, nämlich stets mit den möglichst kleinsten Zahlen zu operiren, und er bedarf jener sogenannten Rechenvortheile und Kunstgriffe nicht;

3) um aber erst zu der allseitigen Vorstellung der Zahl zu führen, kann hier noch von keinem Rechnen der Spezies die Rede sein: diese treten als solche (mit den Uebungen des Schnellrechnens) erst im zweiten Semester auf. Ebenso ist Kopf- und Zifferrechnen auf jeder Stufe vereinigt.

4) Da nunmehr auch die Nothwendigkeit wegfällt, jede Zahl zu isoliren, und nach den einzelnen Rubriken zu behandeln, wie im ersten Kursus geschah, und wegen der allseitigen Durchbringung der Zahl geschehen mußte: so theilen wir unsern Stoff blos in die 2 Theile

A. Die reine Zahl (messen [zerlegen], vergleichen und kombiniren).

B. Die angewandte Zahl.

A. Allseitige Anschauung der reinen Zahl.

(Erstes Vierteljahr.)

Erste Stufe.

Messen der Zahlen nach den dekadischen Einheiten der Einer, Zehner und Hunderter.

S. Entstehung.

dieser. (Mündlich). Herauf- und Herunterzählen von 100 bis 1000.

L. Bohnen, Rechenpfennige und Stäbe veranschaulicht. Ein Würfel ganze Stein Stab, worin 10 solcher Würfel enthalten (eingekerbt) sind

= 10 (1 Zehner); 10 solcher Stäbe (neben einander gelegt) bilden 1 Hundert; eine quadratische Säule von 1 Zoll Höhe, 10 Zoll Länge und 10 Zoll Breite = $\frac{1}{10}$ Kubikfuß; 10 solcher Säulen (auf dem Schultische aufgebaut) bilden 1 Tausend (1 Kubikfuß). Wird mit Bohnen oder Rechenpfennigen (Marken) gezählt, so wird jedes Hundert, sobald es voll ist, in ein Säckchen gethan, und dieses mit seinem Nachfolger zusammengestellt. Damit die Kinder die Wucht der Zahl fühlen, mögen sie auch anfangs Striche (genau in Zehnerreihen geordnet und ökonomisch zusammengedrängt) auf ihre Schiefertafel machen. Beim Zählen wird öfter Halt gemacht, und angegeben, in welchem Hundert und in welchem Zehner darin man sich befindet, wie viel Einer und Zehner an dem resp. Zehner und Hunderter noch fehlen, und (beim Herunterzählen) wie viel Hunterter vom Tausend weg, oder bis zum Tausend hin sind, z. B. bei der Zahl 768.

768 = 7 Hunderter, 6 Zehner, 8 Einer. Die 8 Einer gehören zum 7ten Zehner des 8ten Hunderts; es fehlen noch 2 Einer, bis der 7te Zehner voll ist, noch 3 Zehner am 8ten Hundert und noch 2 Hunderter am Tausend.

Bestimme (auf die angegebene Weise) folgende Zahlen: 500, 501, 704, 174, 714, 829, 999 ꝛc.

Wie heißt tie Zahl, welche 3 Hunderter, 6 Zehner und 5 Einer hat?

Wie viel Einer stecken in 7 H., 8 Z. und 9 E. zusammengenommen?

Wie viel Einer hat ein Tausender und wie viel Hunderter sind das?

Wie heißt die Zahl, welche im 5ten Zehner des 6ten Hunderts 8 Einer stehen hat?

Wie ist 669 entstanden?

Dadurch, daß ich 6 × 100, 6 × 10 und 9 × 1 genommen habe.

b. (Schriftlich.)

Zur Erleichterung mögen die Schüler anfangs die verschiedenen Einheiten in besondere Kästen schreiben.

1	0	1	= 1 Hunderter, 0 Zehner, 1 Einer, = 101.
4	8	0	= 4 Hunderter, 8 Zehner, 0 Einer, = 480.
10	0	0	= 10 Hunderter, 0 Zehner, 0 Einer = 1000.

Dann werden verschiedene Zahlen dictando geschrieben, die geschriebenen gelesen, die Ziffer versetzt (an der Lesemaschine, Wandtafel und Schiefertafel) ꝛc., um die nöthige Sicherheit im Zahlenschreiben zu erzeugen.

Endlich werden dem Mündlichen analog schriftlich diktirte Zahlen aufgelöst, als:

615 = 6 × 100 + 1 × 10 + 5 × 1.

204 = 2 × 100 + 0 × 10 (kein Zehner) + 4 × 1.

$390 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 0 \times 1.$
$1000 = 10 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1.$

Oder:

$615 = 600 + 10 + 5.$
$204 = 200 + 4.$
$390 = 300 + 90.$
$1000 = 1000.$

Da das Tafel- und Kopfrechnen in keinem Gegensatze steht, so werden wir auf den folgenden Stufen der Kürze halber beides vereinigt darstellen, in der Voraussetzung, daß der Lehrer die mündliche Entwickelung jederzeit der schriftlichen Darstellung vorangehen lasse.

Zweite Stufe.

Die reinen Hunderte gemessen mit Hunderten.

(Allseitiges Anschauen — Messen und Vergleichen, Schnellrechnen, Kombiniren — ganz wie im ersten Kursus.)

Im ersten Kursus war bei der Zahl „zwei" folgendes Schema gewonnen:

$1 + 1 = 2.$
$2 \times 1 = 2.$
$2 - 1 = 1.$
$1 : 2 = 2.$

Demgemäß lernt nun der Schüler:

200

$100 + 100 = 200.$
$2 \times 100 = 200.$
$200 - 100 = 100.$
$100 : 200 = 2.$

Welche Zahl steckt zwei Mal in 200?
Von welcher Zahl ist 200 das Doppelte?
Von welcher Zahl ist 100 die Hälfte?
Welche Zahl muß ich verdoppeln, um 200 zu bekommen? ꝛc.
(S. die 2te Stufe des 1ten Kursus.)

300

a. $100 + 100 + 100 = 300.$
$3 \times 100 = 300.$
$100 : 300 = 3.$
$200 + 100 = 300.$
$300 - 100 = 200.$
$300 - 200 = 100.$
$200 : 300 = 1$ mal mit dem Rest von 100 (ich kann die 200 von 300 1 mal wegnehmen, und behalte 100 zum Rest).

300 ist 100 mehr als 200, 200 mehr als 100.
200 ist 100 weniger als 300, 100 mehr als Hundert.
100 ist 200 weniger als 300, 100 weniger als 200.

300 ist das Dreifache von 100.
100 ist das Drittel von 300.
Aus welchen gleichen und aus welchen ungleichen Zahlen besteht 300?

b. Wie viel ist 300 — 100 — 100 + 200 getheilt durch 100?

c. Von welcher Zahl kannst du das Doppelte von 100 wegnehmen, und behältst doch noch 100 übrig? rc.

400

a. 1. Messen mit 100:

100 + 100 + 100 + 100 = 400.
4 × 100 = 400.
400 — 100 — 100 rc.
100 : 400 = 4.

2. Messen mit 200:

200 + 200 = 400.
2 × 200 = 400.
400 — 200 = 200.
200 : 400 = 2.

3. Messen mit 300:

300 + 100 = 400.
100 + 300 = 400.
1 × 300 + 100 = 400.
400 — 200 = 200.
400 — 100 = 300.
300 : 400 = 1 (100).
400 ist 100 mehr als 300.
200 " " 200.
300 " " 100.
300 ist 100 weniger als 400.
100 mehr als 200.
200 " " 100 rc.

Dritte Stufe.

Die gemischten Hunderte gemessen mit gemischten Hunderten.

(Erweiterung der vorigen Stufe.)

Nennt das 2=, 3=, 4=, 5= rc. fache von 110!

440 = 4 × 110, aber auch 2 × 220.
660 = 6 × 110, " " 3 × 220.
880 = 8 × 110, " " 4 × 220, 2 × 440.
990 = 9 × 110, " " 3 × 330.

Wie kannst du 888, 999 betrachten?

888 = 8 × 111, aber auch 4 × 222, 2 × 444.
999 = 9 × 111, 3 × 333.

Wenn sich 333 in 999, 3 in 999, 2 in 888 rc. rc. theilen, wie viel bekommt ein Jeder?

Von welcher Zahl ist 120 der 3te, 4te, 5te Theil?

Welche Zahl ist gleich dem Viertel von 844?

Von welcher Zahl ist 844 das Vierfache?
Welche Zahl kann ich 4 mal von 844 wegnehmen?
Welche Zahl ist 4 mal in 844 enthalten?
Die Hälfte von 844 hat wie viel mehr als ihr Viertel?
Das Drittel von 333 ist das Sechstel von welcher Zahl?

Das Drittel von 333 = 111, 111 ist das Sechstel von 6 × 111 = 666 also ist das Drittel von 333 das Sechstel von 666.

Von welcher Zahl ist das Drittel von 333 das Neuntel?

Das Drittel von 333 = 111, ist 111 das Neuntel einer Zahl, so ist diese 9 × 111 = 999.

Vergleiche 365 mit 244!

365 = 3 H. + 6 Z. + 5 E.; 244 = 2 H. + 4 Z. + 4 E.; — 3 H. − 2 H. = 1 H.; 6 Z. — 4 Z. = 2 Z.; 5 E. — 4 E. = 1 E. Also 365 — 244 = 1 H. + 2 Z. + 1 E. = 121, oder 365 ist um 121 größer als 244, und 244 ist um 121 kleiner als 365.

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 743 und 120?

743 = 7 H. + 4 Z. + 3 E.; 120 = 1 H. 2 Z.; 7 H. — 1 H. = 600. 4 Z. — 2 Z. = 2 Z. 3 E. — 0 E. = 3 E. Also rc.

Welche Zahl ist gleich der Summe von 743 + 221?

743 = 7 H. + 4 Z. + 3 E.; 221 = 2 H. + 2 Z. + 1 E. — 7 H. + 2 H. = 9 H. rc.

Wie viel ist 112 + 113 + 114?
Ziehe von 659 ab 322 und 124!
Wie viel ist 111 + 212 + 313?

(Entsprechende Uebungen, bis Sicherheit da ist.)

Vierte Stufe.

Messen der Hunderter mit dem Zehner.

I. a. Die reinen Hunderter.

Ist 100 = 10 × 10, so ist
2 × 100 oder 200 = 2 × 10 × 10 = 20 × 10,
3 × 100 oder 300 = 3 × 10 × 10 = 30 × 10,
4 × 100 oder 400 = 4 × 10 × 10 = 40 × 10,
10 × 100 oder 1000 = 10 × 10 × 10 = 100 × 10 = 1000.

b. Die Hunderter mit Zehnern.

Ist 100 = 10 × 10, so ist
110 = (10 × 10) + (1 × 10) = 11 × 10,
120 = (10 × 10) + (2 × 10) = 12 × 10,
130 = (10 × 10) + (3 × 10) = 13 × 10,
190 = (10 × 10) + (9 × 10) = 19 × 10,
240 = (20 × 10) + (4 × 10) = 24 × 10,
990 = (90 × 10) + (9 × 10) = 99 × 10.

c. Die Hunderter mit Zehnern.

Ist 100 = 10 × 10, so ist 101 = (10 × 10) + 1,
109 = (10 × 10) + 9,
906 = (90 × 10) + 6,
814 = (81 × 10) + 4 rc.

Wie viel Zehner gehören zu 500, 900, 1000?
Welche Zahl besteht aus 53 Zehnern?
Welche Zahl hat 9 Einer mehr als 53 Zehner?
Das Wievielfache der Zehn ist 660, 420, 870?
Von welchen Zahlen ist die Zehn der 42ste, 66ste ꝛc. Theil?
Wie ist 879 aus dem Zehner entstanden?
Ich habe den Zehner 87 mal gesetzt, und 9 Einer hinzugefügt.

II. 1) Vergleiche 400 mit 900!

400 = 40 Z., 900 = 90 Z., 90 Z. — 40 Z. = 50 Z., also hat 900 50 Z. mehr als 400, und 400 hat 50 Z. weniger als 900.

2) Wie viel sind 55 Zehner weniger als 600? als 660? als 990?

Da 600 = 60 Z., so muß ich zu 55 Z. noch 5 Z. hinzufügen, um 600 zu bekommen; 55 Z. sind also 5 Z. weniger als 600 ꝛc.

3) Die Summe 880 ist aus welchen 4 gleichen Zehner-Posten zusammengesetzt?

880 = 88 Z., da 88 Z. = 4 × 22 Z., so ist 880 aus 4 mal 22 Zehnern zusammengesetzt.

4) Welche Summe geben 800, 180 und 20?

800 + 180 + 20 = 80 + 18 + 2 Z. = 100 Z. = 1000.

5) Welches ist der Unterschied von 160 und 210?

210 oder 21 Z. weniger 160 oder 16 Z. = 5 Z. oder 50, also ist der Unterschied von 160 und 210 = 50.

6) Das Sechzigfache der Zehn ist das Wievielfache von Hundert?

Das Sechzigfache von 10 = 60 Z. = 600 = 6 × 100. Also ist das Sechzigfache der Zehn das Sechsfache des Hunderts.

7) Ich kenne eine Zahl, die hat 8 Zehner und 9 Einer mehr als 490. Welche Zahl ist das?

Die Zahl, welche 8 Z. und 9 E. mehr hat als 490, muß 490 + 8 Z. + 9 E. betragen. 490 oder 49 Z. + 8 Z. = 57 Z. = 570; 570 + 9 = 579. Also ist 579 die Zahl, welche ꝛc.

8) Ich habe eine Zahl 87 mal genommen und 9 Einer hinzugefügt und 879 erhalten. Welche Zahl ist das?

Da 879 = 87 Z. + 9 E., so habe ich die Zehn 87 mal genommen und 8 Einer dazu gethan, und 879 bekommen.

9) Wie viel Zehner hat das 73fache eines Zehners mehr als das Doppelte von 240?

10) Wie oft steckt der 100ste Theil von 1000 in 500?

Da 1000 = 100 Z., so ist der 100ste Theil von 1000 = 1 Z.; dieser steckt aber in 500 = 50 Z. 50 mal.

11) Das Drittel von 630 ist das Viertel welcher Zahl?

Das Drittel von 680 = 210 = 21 Z., 21 Z. sind das Viertel von 4 × 21 Z. = 84 Z. = 840.

12) Der 68ste Theil von 680 und 24ste Theil von 240 zusammengenommen sind wie viel weniger als das Zehnfache von 36?

Da 680 = 68 Z., so ist der 68ste Theil von 680 = 1 Z.; ebenso der 24ste Theil von 240 = 1 Z.; beides zusammen = 2 Z. Das Zehnfache von 36 = 36 Zehnern, 36 Z. — 2 Z. = 34 Z. Also ꝛc.

An diese Uebungen schließt sich natürlich an die Verwechselung der Faktoren.

110 = 11 × 10 = 10 × 11 (110 ist das 11fache von 10, und das 10fache von 11).
220 = 22 × 10 = 10 × 22 (220 ist das 22fache 2c.).
680 = 68 × 10 = 10 × 68.
990 = 99 × 10 = 10 × 99.
Wie ist 990 entstanden?
Wie bildest du aus 13 130?
Wie ist aus 28 280 gebildet?
Welche Zahl muß ich verzehnfachen, um 670 zu bekommen?
Von welcher Zahl ist 67 der 10te Theil?
Wie heißt der 67ste Theil von 670?
Wie oft steckt 79 in 790?
Welche Zahl kann ich 10 mal von 790 wegnehmen? welche 79 mal?
Das 79fache des Zehners ist gleich dem Zehnfachen welcher Zahl?
Diese Uebung leitet nun passend zur folgenden Stufe über.

Fünfte Stufe.

Allseitiges Messen der Zahlen durch ihre Faktoren.

Mit der Anschauung der Hunderter als Vielfache des Zehners und Hunderters ist alle weitere Zerlegung gegeben, weil der Schüler nunmehr bloß die bekannten Elemente der 100 oder der Zehnerzahlen unter 100 auf ihr Vielfaches anzuwenden hat.

I. a. Die reinen Hunderter.
100 = 2 × 50, 4 × 25, 5 × 20, 10 × 10, also
200 = 2 × 2 × 50 = 4 × 50.
2 × 4 × 25 = 8 × 25.
200 = 2 × 5 × 20 = 10 × 20.
2 × 10 × 10 = 20 × 10.
300 = 3 × 2 × 50 = 6 × 50.
3 × 4 × 25 = 12 × 25.
3 × 5 × 20 = 15 × 20.
3 × 10 × 10 = 20 × 15.
2c.

b. Die Hunderter mit Zehnern.
220 = 10 × 22. Da 10 = 2 × 5, so ist
220 = 2 × 5 × 22 = 2 × 110; und da 22 = 2 × 11,
10 × 2 × 11 = 10 × 22, und da 10 auch = 5 × 2,
5 × 2 × 22 = 5 × 44.
960 = 10 × 96.
10 × 2 × 48 = 20 × 48 = 48 × 20,
10 × 3 × 32 = 30 × 32 = 32 × 30,
10 × 4 × 24 = 40 × 24 = 24 × 40,
10 × 6 × 16 = 60 × 16 = 16 × 60,
10 × 8 × 12 = 80 × 12 = 12 × 80.

Oder den zweiten Faktor unverändert gelassen:

$10 \times 96 =$
$2 \times 5 \times 96 = 2 \times 480,$
$5 \times 2 \times 96 = 5 \times 192.$

c. **Die Hunderter mit Zehnern und Einern.**

$426 = (10 \times 42) + 6$ oder $(4 \times 100) + 26,$
$(10 \times 2 \times 21) + 6 = (20 \times 21) + 6,$
$(10 \times 3 \times 14) + 6 = (30 \times 14) + 6 = 14 \times 30 + 6,$
$(2 \times 5 \times 42) + 6 = (2 \times 210) + 6,$
$(5 \times 2 \times 42) + 6 = (5 \times 84) + 6.$

$896 = (8 \times 100) + (8 \times 12) = 8 \times 112.$
$(8 \times 112) = 2 \times 4 \times 112 = 2 \times 448.$
$4 \times 2 \times 112 = 4 \times 224.$
$(10 \times 89) + 6 = (2 \times 5 \times 89) + 6 = 2 \times 445 + 6.$
$(5 \times 2 \times 89) + 6 = (5 \times 178) + 6.$

$489 = (10 \times 48) + 9.$
$(2 \times 240) + 9.$
$(5 \times 96) + 9.$

Oder:

$(10 \times 4 \times 12) + 9 = (40 \times 12) + 9 = (12 \times 40) + 9.$
$(10 \times 3 \times 16) + 9 = (30 \times 16) + 9 = 16 \times 30 + 9.$
$(10 \times 2 \times 24) + 9 = (20 \times 24) + 9.$

Aus wie viel Zweiern, Dreiern, Fünfern ist 300 zusammengesetzt?

Wie findest du den 25sten Theil von 300?

Der 25ste Theil von 100 = 4, der 25ste Theil also von $300 = 3 \times 4 = 12$.

Wie ist 300 aus 15 entstanden?

Da $300 = 10 \times 30$, und $30 = 2 \times 15$, so ist $300 = 10 \times 2 \times 15 = 20 \times 15$. Ich habe also 15 20mal genommen, und 300 erhalten. Oder: da $300 = 2 \times 150$, und $150 = 10 \times 15$, so ist $300 = 2 \times 10 \times 15 = 20 \times 15$.

Wie oft muß ich 44 nehmen, um 220 zu bekommen?

$220 = 10 \times 22 = 5 \times 2 \times 22 = 5 \times 44$. Ich muß also 2c.

Welche Zahl muß ich 5mal von 426 wegnehmen, um 6 zum Rest zu erhalten?

$426 = 10 \times 42 + 6 = 5 \times 2 \times 42 + 6 = 5 \times 84 + 6$. Ich muß also 2c.

Wie oft steckt 24 in 489?

$489 = 10 \times 48 + 9 = 10 \times 2 \times 24 + 9 = 20 \times 24 + 9$.
Also steckt 24 in 489 20mal mit dem Reste von 9.

II. 1) Welches ist der Unterschied von 980 und 377?

Der Unterschied von 980 und $377 = 980 - 377$. $980 = 98$ Zehner, und $377 = 37$ Z. + 7 E. 98 Z. − 37 Z. = 61 Z. − 7 E. = 60 Z.

+ 3 E. = 603. Oder: 900 — 300 = 600, 80 — 77 = 3, also 980 — 377 = 603.

2) Der Unterschied von 980 und 377 ist das Dreifache welcher Zahl?

Der Unterschied von 980 und 377 = 603. Ist 603 das Dreifache einer Zahl, so ist diese der 3te Theil von 603. Der 3te Theil von 600 = 200, von 3 = 1. Also 2c.

3) Das Drittel und Viertel von 480 zusammengenommen ist um wie viel Einer kleiner als das Doppelte von dieser Zahl?

4) Durch welche Zahl muß ich 365 theilen, um 5 zu erhalten?

Wenn ich 365 mit einer Zahl theile und 5 erhalte, so steckt diese 5mal in 365 oder ist der 5te Theil von 365. Der 5te Theil von 300 = 60, der 5te Theil von 65 = 13; also ist der 5te Theil von 365 = 60 + 13 = 73, also muß ich 365 durch 73 theilen, um 5 zu erhalten.

5) Welcher Unterschied ist zwischen dem 22sten und 30sten Theile von 660?

6) Die Summe von 326 und 418 ist um wie viel mehr als die Summe ihrer Hälften?

7) Ich nehme von einer Zahl 4 Einer weg, suche hierauf den 16ten Theil, und erhalte 60. Welches ist jene Zahl?

Die unbekannte Zahl ist = 16 × 60 + 4. 60 = 6 Z. 16 × 6 Z. = 96 Z. = 960, dazu 4 Einer = 964. Also ist 964 die Zahl, von welcher ich 4 weggenommen und den 16ten Theil, als 60, erhalten habe.

8) Welche Zahl ist 10 mehr als das Doppelte des Fünffachen von 99?

Sechste Stufe.

Allseitiges Auflösen der Zahlen von 1 bis 1000 in ihre Elemente.

Aus der Anschauung der Faktoren einer Zahl und ihrer Reste ergibt sich die Anschauung ihrer Elemente überhaupt. Weil diese Stufe die Schnelligkeit und Sicherheit im Zerlegen zum Grunde hat, so kömmt es hier nicht darauf an, in welcher Ordnung die Theile genannt werden. Der Schüler muß es in der Beobachtung der Zahlen nun so weit gebracht haben, daß er ihre augenfälligsten Bestandtheile jederzeit präsent hat. Der Lehrer nennt in beliebiger Reihe die zu zerlegenden Zahlen, und läßt sie theils mündlich, theils schriftlich auflösen.

	360
300 + 60	3 × 100 + 3 × 20
180 + 180	3 × 120
200 + 160	10 × 36
320 + 40	5 × 72
336 + 24	20 × 18 = 18 × 20
2c.	9 × 40
	2c.

365

320 + 45, 2 × 150 + 65, 2 × 182 + 1,
7 × 50 + 15, 14 × 25 + 15, 18 × 20 + 5 2c.

B. Allseitiges Anschauen der angewandten Zahl.

(Zweites Vierteljahr.)

Vorbemerkungen.

Wie der erste Abschnitt das nothwendige Material zu allem ferneren reinen Zahlrechnen (im Kopf wie mit der Ziffer) darreichte, so soll nun dieser zweite das Material für das angewandte Rechnen liefern. Dies besteht aber darin, daß er sein bisheriges Messen der Zahlen von 1 bis 1000 auf die Verhältnisse der bekanntesten Anwendungsgrößen, als Thaler, Groschen, Pfund, Loth ꝛc. anwenden lerne, und so in der Vorstellung der reinen Zahlverhältnisse um so sicherer werde. Da bei jedem Exempel alle 4 Spezies in Anwendung kommen, um eben die allseitige Anschauung zu erzeugen: so tritt hier noch die Operation des Addirens, Subtrahirens ꝛc. als solche ganz zurück.

a. Die Zehnerzahlen.

10 Silbergroschen = 1 Mark.
20 Sgr. = 1 Gulden.
30 Sgr. = 1 Thaler.
50 Neuloth = 1 Pfund.
50 Liter = 1 Scheffel.
50 Kilogramm = 1 Centner.
60 Stück = 1 Schock.

1 Mark = 10 Silbergroschen,
2 Mark = 20 Silbergroschen,
3 Mark = 30 Silbergroschen,
ꝛc.
10 Mark = 100 Silbergroschen,
20 Mark = 200 Silbergroschen,
30 Mark = 300 Silbergroschen,
100 Mark = 1000 Silbergroschen.

So viel Mark als Einer, so viel Silbergroschen als Zehner.

1 Thaler hat 30 Silbergroschen,
2 Thaler haben 60 Silbergroschen,
3 Thaler haben 90 Silbergroschen,
ꝛc.
30 Thaler haben 900 Silbergroschen,
900 Sgr. = 30 × 30 Sgr. = 30 Thlr.,
870 Sgr. = 29 × 30 Sgr. = 29 Thlr.,
840 Sgr. = 28 × 30 Sgr. = 28 Thlr.

Oder: So oft 30 Sgr. in 840 Sgr. enthalten sind, so viel Thaler. 30 in 840 = 3 : 84 = 28. Also sind 840 Sgr. = 28 Thlr.

ꝛc.

1 Gulden = 60 Kreuzer,
2 Gulden = 120 Kreuzer,
3 Gulden = 180 Kreuzer ꝛc.

Verschiedene Aufgaben außer der Reihe:

1) 9, 11, 17, 28 Thaler wie viel Sgr.?
2) 9 Thlr. 14 Sgr., 28 Thlr. 29 Sgr. ? Sgr.
3) 314, 365, 720, 799 Sgr. ? Thlr.

Zähle zusammen: 25 Sgr. + 9 Sgr. + 17 Sgr. + 15 Sgr. Wie viel Sgr.? Wie viel Thlr.? Oder es werden auch die Silbergr. sogleich auf Thaler gebracht, als: 25 Sgr. + 9 Sgr. (1 Thlr. 4 Sgr.) + 17 Sgr. (1 Thlr. 21 Sgr.) + 15 Sgr. (2 Thaler 6 Sgr.).

Von 2 Thlr. 6 Sgr. nimm weg 15 Sgr. — 17 Sgr. — 9 Sgr. = 25 Sgr., oder von 2 Thlr. 6 Sgr. weggenommen 25 Sgr. — 9 Sgr. — 17 Sgr. = 15 Sgr.

Eine Abtheilung nennt (laut) das Dreifache der vom Lehrer angegebenen Zahl, eine andere Abtheilung zählt diese Dreifachen (still) zusammen.

L.				Sch.				
		25	Sgr.		2	Thlr.	15	Sgr.
		9	=				27	=
		17	=		1	=	21	=
		15	=		1	=	15	=
2	Thlr.	6	Sgr.	Andere Abtheil.	6	Thlr.	18	Sgr.

Durch Theilung jedes Postens rechts mit 3 wieder das links stehende Exempel hergestellt.

Bei längeren Exempeln können die einzelnen Posten auch aufgeschrieben werden; z. B.:

14	Thlr.	15	Sgr.
15	=	16	=
16	=	17	=
17	=	18	=
18	=	19	=
19	=	20	=

Es werden, 1, die vorstehenden Posten auf die angedeutete Weise summirt, nämlich:

14 Thlr. 15 Sgr. + 15 Thlr. = 29 Thlr. + 15 Sgr. + 16 Sgr. = 30 Thlr. 1 Sgr.; 30 Thlr. 1 Sgr. + 16 Thlr. 17 Sgr. = 46 Thlr. 18 Sgr.; + 17 Thlr. = 63 Thlr. 18 Sgr. + 18 Sgr. = 64 Thlr. 6 Sgr.; + 18 Thlr. 19 Sgr. = 82 Thlr. 25 Sgr. + 19 Thlr. = 101 Thlr. 25 Sgr. + 20 Sgr. = 102 Thlr. 15 Sgr.

Hierauf werden, 2, die einzelnen Posten von der Totalsumme abgezogen, bis der erste oder letzte Posten als Rest bleibt.

Endlich, 3, ein Vervielfachen der Posten mit 2, 3, 4 ꝛc., Summiren dieser Posten, und Theilen der Summe durch 2, 3, 4 ꝛc., wo sich dann die erste Summe wieder ergibt.

Auf ähnliche Weise 1 Schock bis 16 Schock in Stück.
1 Zentner bis 9 Zentner in Pfund.

b. Die Zehner und Einer.

1 Groschen bis 24 Groschen in Pfennige.
1 Mandel bis 15 Mandel in Stück.
1 Dutzend bis 24 Dutzend in Stück.
1 Thaler bis 24 Thaler in gute Groschen.
Das Verfahren ist überall das bei den Silbergroschen angegebene. Unverlierbar dem Gedächtnisse einzuprägen ist das

12×1 bis 24×12,
15×1 bis 15×15,
16×1 bis 16×16,
24×1 bis 24×24,

und der Lehrer thäte wohl, eine Zeit lang jede Stunde mit dem Aufsagenlassen dieser Reihen zu beginnen.

Nachdem nun der Schüler sich geübt hat, den Thaler, Scheffel ꝛc. in seinen Vielfachen zu erkennen, soll er nunmehr die Theile dieser Einheiten mit Bezug auf ihr Ganzes auffassen, und das ist die zweite Hauptübung dieser Stufe, die sonst gewöhnlich bis in den Kursus des Bruchrechnens verschoben wird, aber für ein schnelles und gewandtes Rechnen mit ganzen Zahlen durchaus nöthig ist.

a. Die Theile des Groschens und Thalers.
(Wiederholung und Schnellrechnen.)

Ein Groschen = 12 Pfennige.
Ein halber Groschen = 6 Pfennige.
Ein Drittel-Groschen = 4 Pfennige.
Ein Viertel-Groschen = 3 Pfennige.
Ein Sechstel-Groschen = 2 Pfennige.
Ein Zwölftel-Groschen = 1 Pfennig.

Umgekehrt:
12 Pfennige = 1 ganzen Groschen.
6 Pfennige = 1 halben Groschen.
4 Pfennige = 1 Drittel-Groschen.
ꝛc.

1	Thaler	=	24	gute	Groschen	=	30	Sgr.		
$\frac{1}{2}$	=	=	12	=	=	=	15	=		
$\frac{1}{3}$	=	=	8	=	=	=	10	=		
$\frac{1}{4}$	=	=	6	=	=	=	7	=	6	Pf.
$\frac{1}{5}$	=					=	6	=		
$\frac{1}{6}$	=	=	4	=	=	=	5	=		
$\frac{1}{8}$	=	=	3	=	=	=	3	=	9	=
$\frac{1}{12}$	=	=	2	=	=	=	2	=	6	=
$\frac{1}{15}$	=					=	2	=		
$\frac{1}{24}$	=	=	1	=	=	=	1	=	3	=
$\frac{1}{30}$	=					=	1	=		

Und umgekehrt:
12, 6, 8, 3 ꝛc. gute Gr. ? Thaler.
15, 10, 3, 6 ꝛc. Sgr. ? Thaler.

Ist $\frac{1}{3}$ Thlr. = 8 g. Gr. = 10 Sgr., so sind
$\frac{2}{3}$ Thlr. = 16 g. Gr. = 20 Sgr. = 1 Gulden.

Wie viel sind $6\frac{1}{2}$ Thaler in Sgr.? wie viel in guten Gr.?

Ebenso $6\frac{2}{3}$ Thaler!

192 Sgr. sind wie viel weniger als 192 g. Gr.?

Vergleiche 7 Thaler 18 g. Gr. mit 15 Thaler 15 Sgr.!

7 Thlr. 18 g. Gr. = 168 + 18 g. Gr. = 186 g. Gr. Da 15 Sgr. = 12 g. Gr., so sind 15 Thlr. 15 Sgr. = 15 Thlr. 12 g. Gr. = 372 g. Gr. 186 g. Gr. $\frac{1}{2}$ × 372 g. Gr. Also 15 Thlr. 15 Sgr. sind das Doppelte von 7 Thlr. 18 g. Gr.

Welcher Theil von $1\frac{3}{4}$ Thlrn. sind 3 Sgr. 9 Pf.

3 Sgr. 9 Pf. = 3 g. Gr. $1\frac{3}{4}$ Thlr. = 1 Thlr. 18 g. Gr. 3 g. Gr. in 1 Thlr. 8 mal, in 18 g. Gr. 6 mal, also in 1 Thlr. 18 g. Gr. 14 mal ꝛc.

Wie viel beträgt der 5te Theil von 11 Thalern?

b. Die Theile des Zentners und Pfundes.

1	Zentner	=	50	Kilogramm
$\frac{1}{2}$	"	=	25	"
$\frac{1}{5}$	"	=	10	"
$\frac{2}{5}$	"	=	20	"
$\frac{3}{5}$	"	=	30	"
$\frac{4}{5}$	"	=	40	"

Und ebenso:

1	Kilogramm	=	2	Pfund	=	100	Loth.
$\frac{1}{2}$	"	=	1	"	=	50	"
$\frac{1}{4}$	"	=	$\frac{1}{2}$	"	=	25	"
$\frac{1}{8}$	"	=	$\frac{1}{4}$	"	=	$12\frac{1}{2}$	"

c. Die Theile des Schockes.

1	Schock	=	60	Stück.		
$\frac{1}{2}$	"	=	30	"	2	Mandel.
$\frac{1}{3}$	"	=	20	"		
$\frac{1}{4}$	"	=	15	"	1	"
$\frac{1}{5}$	"	=	12	"	1	Dutzend.
$\frac{2}{5}$	"	=	24	"	2	" ꝛc.
$\frac{1}{6}$	"	=	10	"		
$\frac{1}{10}$	"	=	6	"		
$\frac{1}{12}$	"	=	5	"		
$\frac{1}{15}$	"	=	4	"		
$\frac{1}{20}$	"	=	3	"		
$\frac{1}{30}$	"	=	2	"		
$\frac{1}{60}$	"	=	1	"		

Und umgekehrt.

Das ist genügend als Grundlage für die späteren Uebungen, muß aber eben als solche ganz fest dem Gedächtnisse eingeprägt sein. Dann wird der Schüler von selbst auf die „Vortheile" bei den Operationen der Spezies kommen; beim Addiren z. B. mit Hilfe seines Einmaleins die gleichen oder fast gleichen Zahlen einer Reihe zusammenfassen; bei benannten Zahlen mäßige Summen gleich im Kopf reduziren u. s. f.

II.

Die 4 Spezies in benannten und unbenannten Zahlen — in beliebigem Zahlraum.

(Regelrechnen.)

Dritten Jahres:
Zweites Semester.

Vorbemerkungen.

Nachdem in den beiden ersten Kursen die Zahlobjekte allseitig angeschaut und beobachtet sind, tritt nun die Uebung und Fertigkeit in den einzelnen Operationen jener Anschauung hervor, das Zifferrechnen als solches macht sich geltend, und die Operation als solche bildet den Eintheilungsgrund. Demnach wird nun die Anordnung des Stoffes folgende:

A. Rechnen mit unbenannten Zahlen.

b. Schriftlich.
1) Numeriren,
2) Addiren,
3) Subtrahiren,
4) Multipliziren,
5) Dividiren.

B. Rechnen mit benannten Zahlen.

a. Mündlich.
1) Numeriren (Resolviren und Reduziren),
2) Addiren,
3) Subtrahiren,
4) Multipliziren,
5) Dividiren,
6) Multiplikations- } Regel-de-tri.
7) Divisions- }

Dabei ist nun aber das Kopf- und Zifferrechnen nicht also geschieden, als ob beides ein Verschiedenes wäre, also auch in verschiedenen Stunden absolvirt würde; sondern das „Kopfrechnen" als die die Zahl anschauende und vorstellende Thätigkeit bildet überall die Grundlage und den Ausgangspunkt, an welchen sich die schriftliche Darstellung durch die Ziffer, als ein bequemes und zweckmäßiges Mittel, längere Zahlenreihen durch Niederschreiben sich übersichtlich zu erhalten, anschließt. So nur wird das Zifferrechnen in seinem Konnex als Denkrechnen erhalten.

Aus demselben Grunde sollen auch die einzelnen Operationen, obwohl sie der Fertigkeit willen vereinzelt werden, doch nicht einseitig sich ausschließen, so daß beim „Addiren" nur addirt, beim Subtrahiren nur „subtrahirt" werden müßte: sondern die in den vorigen Kursen angebahnte allseitige Anschauung der Zahlen wird auch hier fortgesetzt und soll nie ausgesetzt werden, denn ohne dies gingen wir des erlangten

Gewinnes für ein „beobachtendes" Anschauen verlustig. Ist aber eine Aufgabe recht intensiv verarbeitet, dann werden eine Menge anderer ihr nachgebildet, um eine bestimmte Form der Ausrechnung zur Fertigkeit zu bringen. Es dürfen dann namentlich die Uebungen im Schnellrechnen nicht vernachlässigt werden, zumal da hier gerade die Schüler in angeregtem Wetteifer der gespanntesten Aufmerksamkeit sich hingeben.

Wir deuten auf jeder Stufe bloß das Wesentliche der Uebung an, die weitere Ausführung dem Lehrer überlassend, der ja in den neueren ganz zweckmäßigen Aufgaben-Sammlungen einen methodisch geordneten und völlig gebahnten Gang, so wie das nöthige Material vorfindet.

A. Rechnen mit unbenannten Zahlen.

Erste Stufe.

Das Numeriren.

a. Mündlich.

α. Tausender und Millioner. Sind die 10 Hunderter voll, so haben wir abermals eine neue Einheit gewonnen, die wieder von 1 bis 999 gezählt werden kann (5 Tausend, 50 Tausend, 500 Tausend, 800 T., 900 T. u. s. w.). Kommt zu 999 Tausend noch 1 Tausend, so gibt das 1000 Tausend (1000 mal tausend) oder 1 Million. Der Würfel, der früher 1 vorstellte, kann auch 1 Tausend vorstellen. Hat 1 Kubikzoll 1000 Kubiklinien, so enthält 1 Kubikfuß 1 Million Kubiklinien. Wenn in jedem Beutel 1000 Bohnen wären, wie viel Beutel brauchte man zu 1 Million? Wie viel zu einer halben, Viertel-Million?

β. Wie aber die Einheit, welche wir Tausender nennen, niedere Einheiten, nämlich Hunderter und Zehner in sich begreift, so unterscheidet man auch Zehnertausende und Hunderttausende.

Wie 1 × 1 Einer = 1 Einer = 1, so ist
10 × 1 Einer = 1 Zehner = 10,
10 × 1 Zehner = 10 Zehner = 100,
10 × 1 Hunderter = 1 Tausender = 1000,
10 × 1 Tausender = 1 Zehntausender = 10,000,
10 × 1 Zehntausender = 1 Hunderttausender = 100,000,
10 × 1 Hunderttausender = 1 Million = 1,000,000.

Die Schüler sprechen in derselben Weise durch:
1 × 2 Einer = 2 Einer = 2,
10 × 2 Einer = 2 Zehner = 20,
10 × 2 Zehner = 2 Hunderter = 200 ꝛc
u. s. f. bis 9 × 2.

Dann umgekehrt:
1 Einer = 1 × 1 Einer,
1 Zehner = 10 × 1 Einer, = 10 Einer,
1 Hunderter = 10 × 1 Zehner = 100 Einer,
1 Tausender = 10 × 1 Hunderter = 100 × 1 Zehner
1000 Einer. ꝛc.

Nennen wir die Einheiten der Einer die Einheiten der ersten Ordnung, so sind die Zehner die Einheiten der zweiten Ordnung ꝛc.; die Einheiten jeder folgenden Ordnung sind das Zehnfache der vorhergehenden; in jeder Ordnung gibt es bloß 10 Einheiten, und zwar ist die zehnte Einheit immer die erste der nachfolgenden Ordnung.

b. Schriftlich.

Wir wollen die Zahl 1852 so schreiben, daß Einer, Zehner, Hunderter, Tausender — jeder in einen besonderen Kasten kommt.

1	8	5	2

Zählen wir von rechts nach links, so kommen die *Einer* in den 1sten Kasten, die *Zehner* in den 2ten Kasten, die *Hunderter* in den 3ten Kasten, die *Tausender* in den 4ten Kasten, die *Zehntausender* in den 5ten Kasten, die *Hunderttausender* in den 6ten Kasten, die *Tausendtausender* oder *Millionen* in den 7ten Kasten.

7	6	5	4	3	2	1
6	0	9	2	1	6	0

6 Million
0 (kein) Hunderttausender
9 Zehntausender
2 Tausender
1 Hunderter
6 Zehner
0 Einer

kürzer: 6 Millionen 92 Tausend 1 Hundert und 60.

Wie nennt man die Einheiten der 1sten, der 3ten, der 5ten, der 7ten Ordnung?

Wie würden die Einheiten der 8ten Ordnung heißen? (Zehnermillionen.)

8	7	6	5	4	3	2	1
9							
	9						
		9					
			9				
				9			
					9		
						9	
							9

8	7	6	5	4	3	2	1
							9
						9	0
					9	0	0
				9	0	0	0
			9	0	0	0	0
		9	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0

90,000,000	99 Millionen 9 Hundert und 99 Tausend 9 Hundert und 99.
9,000,000	
900,000	
90,000	
9,000	
900	
90	
9	

In ein zweites Netz werden nun vom Lehrer Zahlen diktirt, dann ohne diese Hülfe geschrieben aber in ihre Einheiten aufgelöst, als

6096 = 6000 oder 6000 + 90 + 6.
000
90
6

— eine gute Vorbereitung auf die folgende Stufe. Mit tausendmal tausend Millionen braucht sich der Lehrer nicht abzuquälen, auch nicht mit Millionen überhaupt. Nur auf senkrechte Säulen werde streng gehalten, und der Uebung willen mögen längere Reihen diktirt werden.

Zweite Stufe.

Das Addiren.

Mündlich und schriftlich.

a. Mit einstelligen Zahlen.

4 E. + 5 E. = 9 E. (4 + 5 = 9).
4 Z. + 5 Z. = 9 Z. = 90 E. (40 + 50 = 90).
4 H. + 5 H. = 9 H. = 900 E. (400 + 500 = 900).
4 T. + 5 T. = 9 T. = 9000 E. (4000 + 5000 = 9000).
4 Zehntaus. + 5 Zehntaus. = 9 Zehntaus. = 90,000 E. (40,000 + 50,000 = 90,000).

2c.

b. Mit zweistelligen und einstelligen Zahlen.

43 E. + 5 E. = 48 E. (43 + 5 = 48).
43 Z. + 5 Z. = 48 Z. = 480 E. (430 + 50 = 480).

2c.

c. Mit zweistelligen und zweistelligen Zahlen.

43 E. + 28 E. = 71 E. (43 + 28 = 71).
43 Z. + 26 Z. = 71 Z. = 710 E. (430 + 280 = 710).

2c.

d. Mit dreistelligen und einstelligen Zahlen.

416 E. + 8 E. = 424 E. (416 + 8 = 424).
416 Z. + 8 Z. = 424 Z. = 4240 E. (4160 + 80 = 4240).

2c.

e. Mit dreistelligen und zweistelligen Zahlen.

416 E. + 23 E. = 439 E. (416 + 23 = 439).
416 Z. + 23 Z. = 439 Z. = 4390 E. (4160 + 230 = 4390).
416 H. + 23 H. = 43,900 E. (41,600 + 2300 = 43,900).

416 T. + 23 T. = 439 T. = 439,000 E. (416,000 + 23,000 = 439,000).

f. Mit dreistelligen und dreistelligen Zahlen.

416 E. + 123 E. = 539 E. (416 + 223 = 539).

416 Z. + 123 Z. = 539 Z. = 5390 E (4160 + 1230 = 5390).

416 H. + 123 H. = 539 H. = 53,900 Einer. (41,600 + 12,300 = 53,900).

416 T. + 123 T. = 539 T. = 539,000 E. (416,000 + 123,000 = 539,000).

Die entsprechenden Reihen für das Schnellrechnen.

a.
7 + 8 + 9 + 6
70 + 80 + 90 + 60
700 + 800 + 900 + 600
7000 + 8000 + 9000 + 6000
70000 + 80000 + 90000 + 60000
700000 + 800000 + 900000 + 600000.

b.
25 + 9 + 3 + 8
250 + 90 + 30 + 80.
2c.

c.
25 + 36 + 47 + 58
250 + 360 + 470 + 580.
2c.

d.
254 + 6 + 8 + 9
2540 + 60 + 80 + 90
25400 + 600 + 800 + 900.

e.
254 + 27 + 38 + 49
2540 + 270 + 380 + 490
25400 + 2700 + 3800 + 4900.

f.
254 + 316 + 449
2540 + 3160 + 4490.

Dann außer der Reihe, besonders mit Uebergang aus einem Zehner in den andern.

Die unsern Gang gewandelten Schüler werden auf die etwaigen „Vortheile" von selbst kommen, so z. B. 229 + 398 mit Hilfe der Subtraktion berechnen als 300 + 300 — (1 + 2), oder 163 + 167 + 162 mit Hilfe der Multiplikation 6 × 16 Z. (3 + 7 + 2) Einer, oder statt 59 + 60 + 61 = 3 × 60 rechnen. Die Kleinen zeigen sich oft sehr erfindungsreich, wenn die Aufgabe gestellt wird, ein Exempel auf verschiedene Weise aufzulösen. Daß der Lehrer nicht diese oder jene Vortheile seinen Schülern vordoziren dürfe, braucht wohl kaum erinnert zu werden.

Auf die schriftliche Form des Addirens werden die Schüler stufenweis hingeführt; z. B. 36 + 24 + 15 + 23 + 50 = 30 + 20 + 10 + 20 + 50 = 130; und 6 + 4 + 5 + 3 = 18; 130 + 18 = 148. Bequemer in eine senkrechte Säule geschrieben

1)	36	kürzer:	3
	24		36
	15		24
	23		15
	50		23
			50
	18 Einer		148
	13 Zehner		
	148 Einer.		

2)	365	bequemer:	365	kürzer:	365
	21		21		21
	1430		1430		1430
	2045		2045		2045
	320		320		320
	3000		11		4181
	1000		170		
	170		1000		
	11		3000		
	4181		4181		

3)	5946	5946	2. 1 2
	847	847	5946
	239	239	847
	6320	6320	239
	11000	22	6320
	2200	130	13352
	130	2200	
	22	11000	
	13352	13352	

„Weil durch das Zusammenzählen der niederen Einheiten sehr oft Einheiten der höheren Ordnung entstehen, ist es bequemer, bei der Einerreihe die Addition anzufangen."

Das Rechnen sollte in der scharfen, bestimmten Ausdrucksweise der Geometrie ebenbürtig zu werden trachten. Die mathematische Schärfe und logische Reinheit der Sprache wirkt höchst vortheilhaft auf die Klarheit und Schärfe des Denkens. Man halte darum die Sorgfalt darin nicht für übertrieben oder den geometrischen Anstrich für zu luxuriös. Von einem Additionsexempel wie 5625 + 3918 + 335 + 4260 sollte der Schüler Folgendes sicher auszusagen wissen. [Es handelt sich bei jeder Auflösung um die drei Fragen:]

a. Was ist als bekannte Zahl gegeben? (Bedingung.)
b. Welche Zahl wird gesucht? (Frage.)
c. Was ist mit den bekannten Zahlen zu thun, um die unbekannte zu finden? (Operation.)

„Es sind mir die Zahlen 5625 rc. rc. als Posten gegeben, zu

denen ich die Summe suchen soll. Da die Summe gleich ist den Posten zusammengenommen, muß ich sie zusammenzählen."

„Ich schreibe die Zahlen nach der Ordnung der Einheiten senkrecht untereinander, und suche zuerst die Summe der Einer. Diese beträgt 23. Da 23 Einer = 2 Z. + 3 E., so zähle ich die 2 Zehner zu der folgenden Zehnerreihe zu, und bemerke bloß die drei Einer" u. s. f.

Um das Wesen der Addition noch mehr zum Bewußtsein zu bringen, und eine größere Allseitigkeit in den Operationen zu gewinnen, gebe der Lehrer umgekehrt erst die Summe und lasse diese in ihre Posten zerlegen; z. B.

Eine Summe 64028 ist aus 4 Posten zusammengesetzt; der erste (a) ist die Hälfte der ganzen Summe — (der Schüler findet a = 32014), der zweite ist die Hälfte des ersten (b = 16007), der dritte ist um 6007 Einheiten kleiner, als der zweite (c = 10000), und der vierte ist um 3993 kleiner als der dritte (d = 6007).

(a)	32014
(b)	16007
(c)	10000
(d)	6007

1) Die Summe e sei unbekannt und soll gesucht werden.

„Die Posten a, b, c, d sind die Theile der Summe e, also e = a + b + c + d."

2) Es sei a unbekannt. Wie findest du aus e und den 3 bekannten Posten den unbekannten?

3) Wie aus a, c, d und e — b? zc.

4) Was bleibt, wenn du a, b, c, d von e wegnimmst?

Die Auflösung gibt zugleich eine Probe der Richtigkeit der Summe.

Dritte Stufe.

Das Subtrahiren.

Mündlich und schriftlich.

a. Mit einstelligen Zahlen.

9 E. — 5 E. = 4 E. (9 — 5 = 4).
9 Z. — 5 Z. = 4 Z. (90 — 50 = 40).
9 H. — 5 H. = 4 H. (900 — 500 = 400).
zc.

b. Mit zweistelligen und einstelligen Zahlen.

12 E. — 5 E. = 7 E. (12 — 5 = 7).
12 Z. — 5 Z. = 7 Z. (120 — 50 = 70).
zc. zc.

Ganz in der Weise wie bei der Addition.

Von 9456 soll weggenommen werden 7321!

a. $\begin{array}{r} 9456 = 9000 + 400 + 50 + 6 \\ -\ 7321 = 7000 + 300 + 20 + 1 \\ \hline 2000 + 100 + 30 + 5 \end{array} = \begin{array}{r} 9456 \\ -\ 7321 \\ \hline 2135 \end{array}$

b. 4325 — 1123 = 4325 Vollz.
1123 Abz.
3202 Rest.

c. (Borgen ohne Nullen.)

1) 6 15 18 / 17.6.8 − 679 = 1089; 17.6.8 − 679 = 1089

2) 4 13 12 / 45.4.2 − 4159 = 0383; 45.4.2 − 4159 = 383

d. (Borgen mit Nullen.)

1) 15 10 / 74.6.0 − 3269 = 4191; 74.6.0 − 3269 = 4191

(9 Einer von 0 Einern kann ich nicht abziehen, ich borge bei den Zehnern, und nehme von 6 Z. einen Z. weg, was ich durch einen Punkt hinter der 6 andeute. Der weggenommene Zehner = 10 Einer; von 10 E. 9 Einer abgezogen, bleibt noch 1 Einer, u. s. f.)

2) 9 / 10 16 / 74.0.6 − 3269 = 4137; 74.06 − 3269 = 4137

3) 9 / 10. 13 16 / 7.0 4.6 − 3269 = 3777; 7.0 4.6 − 3269 = 3777

4) 9 / 10. 10 / 74.00 − 3269 = 4131; 74.00 − 3269 = 4131

5) 9 9 / 6 10. 10 14 / 7.004 − 3269 = 3735; 7.004 − 3269 = 3735

6) 9 9 / 10 10. 10 / 7.000 − 3269 = 3731; 7.000 − 3269 = 3731

7) 9 9 9 / 10. 10. 10. 16 / 7.0006 − 32697 = 37309; 7.0006 − 32697 = 37309

7 Einer von 6 E. können nich[t] ... nern, diese haben nichts, ich borg[e] ...

u. s. f.; ich borge bei den Zehnertausendern; von 7 Zehntausendern 1 Zehntaus. weggenommen, bleiben noch 6 Zehntaus., was ich durch den Punkt hinter der 7 andeute. Der Zehntaus. hat 10 Tausender, von diesen nehme ich 1 T. weg, und es bleiben hier noch 9 T., was ich durch den Bogen über der 0 andeute; das eine Tausend hat 10 Hunderter; von diesen nehme ich ein H. weg, und lasse hier 9 H., was ich wieder durch &c.; das 1 H. hat 10 Zehner, von diesen nehme ich 1 Z. weg, und lasse bei den Zehnern 9 stehen, was ich wieder &c. Der weggenommene Zehner hat 10 Einer, welche ich zu den 6 Einern hinzufüge und 16 Einer erhalte. 7 Einer von 16 Einern bleiben 9 Einer &c.

Bevor sich der Schüler in dieser Weise nicht ganz fertig über seine Operation aussprechen kann, gehe man nicht zum schnellen Tafelrechnen über.

Begriff des Subtrahirens.

Wir knüpfen an die Erläuterung des Addirens an. Von 2 Posten heißt a 3480, b 2375, wie groß ist die Summe c? (c = 3480 + 2375 = 5855.) Wie groß ist a? (a = 5855 — 2375.) Wie groß ist b? (b = 5855 — 3480.) Wie wurde c gefunden? (Durch Addiren der Posten a und b.) Wie findest du a oder b? Durch Subtrahiren des bekannten Postens a oder b von ihrer gemeinschaftlichen Summe.) Wie nennen wir beim Subtrahiren die bekannte Summe? (Vollzahl oder Minuendus.) Wie heißt der bekannte Posten? (Abzugszahl oder Subtrahendus.) Wie der zu suchende? (Rest, Unterschied, Differenz.) Wenn mir die Vollzahl unbekannt wäre, wie würde ich sie finden? (Durch Addition des Subtrahendus und Unterschiedes.)

$$\begin{array}{r} 5855 \\ -\ 3480 \\ \hline 2375 \\ +\ 3480 \\ \hline 5855 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 5855 \\ -\ 2375 \\ \hline 3480 \\ +\ 2375 \\ \hline 5855 \end{array}\right\} \text{Probe.}$$

Wodurch kann ich also erproben, ob ich richtig subtrahirt habe?

Wie heißt das Ganze bei einer Subtraktionsaufgabe? wie bei einer Additionsaufgabe?

Wodurch unterscheidet sich das Subtrahiren vom Addiren?

Dort ist mir das Ganze und ein Theil gegeben, und ich soll den andern Theil finden, hier sind mir die Theile gegeben, um daraus das Ganze zu bilden.

Die Summe 5855 sei aus 3 Posten zusammengesetzt, von denen der erste = 1320, der zweite = 1427, wie heißt der dritte?

$$\begin{cases} 5855 - 1320 - 1427 = \\ 5855 - (1320 + 1427) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 585\,5 \\ 132\,0 \\ \hline 453.5 \\ 142\,7 \\ \hline 310\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132\,0 \\ +\ 142\,7 \\ \hline 274\,7 \\ 585.5 \\ -\ 274.7 \\ \hline 310\,8 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{r} 3108 \\ +\begin{cases}1320 \\ 1427\end{cases} \\ \hline 5855 \end{array}$$

Vierte Stufe.

Das Multipliziren.

Mündlich und schriftlich.

1) Der Multiplikator einstellig.

a. Der Multiplikand einstellig.

3 × 9 Einer = 27 Einer (3 × 9 = 27).
3 × 9 Zehner = 27 Zehner (3 × 90 = 270).
3 × 9 Hunderter = 27 H. (3 × 900 = 2700). ꝛc.

b. Der Multiplikand zweistellig.

3 × 29 = 87 E. (3 × 29 = 3 × 20 = 60
3 × 9 = 27
87).

3 × 29 Zehner = 87 Z. (3 × 290 = 870).
3 × 29 Hunderter ꝛc.

c. Der Multiplikand dreistellig.

3 × 529 Einer = 1587 E. (3 × 500 = 1500
3 × 20 = 60
3 × 9 = 27
1587).

3 × 529 Zehner = 1587 Z. (3 × 5290 = 15870).
3 × 529 Hunderter = 1587 H. (3 × 52900 = 158700).
ꝛc.

d. Der Multiplikand vierstellig.

3 × 5293 E. = 15879 E. (3 × 5000 = 15000
3 × 200 = 600
3 × 90 = 270
3 × 3 = 9
15879).

3 × 5293 Z. = 15879 Z. (3 × 52930 = 158790).
3 × 5293 Hunderter = 15879 Hunderter (3 × 529300 = 1587900).

2) Der Multiplikator zweistellig.

a. Die reine Zehnerzahl.

α. Multiplikand einstellig.

60 × 5 Einer = 300 E. (60 × 5 = 300).
60 × 5 Z. = 300 Z. (60 × 50 = 3000).
60 × 5 Hund. = 300 Hund. (60 × 500 = 30000).
60 × 5 T. = 300 T. (60 × 5000 = 300000).

β. Multiplikand zweistellig.

60 × 56 E. = 3360 E. (60 × 50 = 3000
60 × 6 = 360
3360).

60 × 56 Z. = 3360 Z. (60 × 560 = 33600).

ꝛc.

γ. Multiplikand dreistellig.

60 × 562 E. = 33720 E. (60 × 500 = 30000
60 × 60 = 3600
60 × 2 = 120
33720).

60 × 562 Z. = 33720 Z. (60 × 5620 = 337200).

b. Gemischte Zehnerzahl.

α. 25 × 9 E. = 225 E. (20 × 9 = 180
5 × 9 = 45
225).

25 × 9 Z. = 225 Z. (25 × 90 = 2250).

β. 25 × 96 E. = 2400 E. (20 × 96 = 1920
5 × 96 = 480
2400).

25 × 96 Z. = 2400 Z. (25 × 960 = 24000).

3) Der Multiplikator dreistellig.

a. Reine Hunderter.

α. Multiplikand einstellig.

300 × 9 E. = 2700 E. (300 × 9 = 2700).
300 × 9 Z. = 2700 Z. (300 × 90 = 27000).
300 × 9 H. = 2700 H. (300 × 900 = 270000).

β. Multiplikand zweistellig.

300 × 91 E. = 27300 E. (300 × 90 = 27000
300 × 1 = 300
27300).

300 × 91 Z. = 27300 Z. (300 × 910 = 273000).

γ. Multiplikand dreistellig.

300 × 914 E. = 274200 (300 × 900 = 270000
300 × 10 = 3000
300 × 4 = 1200
274200).

b. Gemischte Hunderter.

304 × 9 E. = 2736 E. (300 × 9 = 2700
4 × 9 = 36
2736).

304 × 9 Z. = 2736 Z. (304 × 90 = 27360).
304 × 9 H. = 2736 H. (304 × 900 = 273600).

Das ist genügend, ja fast schon zu viel, indem das Multipliziren mit 2 Stellen für die gewöhnlichen Fälle vollkommen ausreicht. Es folgen nun Reihen für das Schnellrechnen.

a. Mit Verbindung der Addition und Subtraktion.
b. Mit bloßer Multiplikation.

Form für das Tafelrechnen.

1) Der Multiplikator ist einziffrig, und zwar
a. ohne Nullen,
b. mit Nullen.

Der Multiplikandus bietet entweder keinen Uebergang in einen andern Zehner dar (aa), oder es findet ein solcher Statt (bb); dabei enthält er entweder keine Nullen (α) oder Nullen (β).

2) Der Multiplikator ist zweiziffrig,
wiederum a, b
aa, bb
α β
u. s. f.

1) a, aa, α. Wie viel ist 3×3213?

$$
\begin{aligned}
3 \times 3213 = 3 \times 3000 &= 9000 \\
3 \times 200 &= 600 \\
3 \times 10 &= 30 \\
3 \times 3 &= 9 \\
\hline
&\ 9639
\end{aligned}
$$

Kürzer:

$$
\begin{array}{r}
3213 \\
3 \times \\
\hline
9 \\
30 \\
600 \\
9000 \\
\hline
9639
\end{array}
$$

Am kürzesten:

$$
\begin{array}{r}
3213 \\
3 \\
\hline
9639
\end{array}
$$

a, bb, α. Wie viel ist 3×3226?

$$
\begin{aligned}
3 \times 3226 = 3 \times 3000 &= 9000 \\
3 \times 200 &= 600 \\
3 \times 20 &= 60 \\
3 \times 6 &= 18 \\
\hline
&\ 9678
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
3226 \\
3 \times \\
\hline
18 \\
60 \\
600 \\
9000 \\
\hline
9678
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{r}
3226 \\
3 \\
\hline
9678
\end{array}
$$

a, bb, β. Wie viel ist 3×4046?

$$
\begin{aligned}
3 \times 4046 = 3 \times 4000 &= 12000 \\
3 \times 40 &= 120 \\
3 \times 6 &= 18 \\
\hline
&\ 12138
\end{aligned}
$$

```
 4046                    4046
    3 ×         =           3
 -----                  -----
   18                   12138
  120
12000
-----
12138
```

b, aa, α. Wie viel ist 3 × 32130?
Wie viel ist 3 × 321300?
Wie viel ist 3 × 3213000?

3 × 32130 = (3 × 3213) × 10 (Zehner)

```
3 × 3213 = 3213
              3
           ----
           9639
```

10 × 9639 = 96390. Also:

```
3 × 32130 = 32130
                3
            -----
            96390
```

Der Schüler abstrahirt die Regel, daß so viel mal ich eine Null an das Produkt hänge, so oft ich auch mit 10 multiplizire.

Daraus folgt, daß, wenn ich eine Zahl mit Zehnern, Hunderten rc. zu multiplizirenhabe, ich dieselbe nur mit den Einern der resp. Ordnung zu vervielfältigen brauche, und dann so viel Nullen anhänge, als die Ordnung verlangt, z. B. 345 × 2068 =

```
   20 6 8
    3 4 5 ×
  --------
   103 4 0    Produkt der Einer
   827 2(0)   Produkt der Zehner
  6204(0 0)   Produkt der Hunderter
  ---------------------------------
  7134 6 0    Haupt-Produkt.
```

Kürzer:

```
  2068
   345
 -----
 10340
 8272
6204
------
713460
```

Begriff des Multiplizirens.

Wie oft mußt du 112 zu sich selber zählen, um 336 zu bekommen? Thue das!

```
112
112
112
---
336
```

Wie kannst du das kürzer ausdrücken?
Ich nehme 112 3 mal.

112	(a)
3	(b)
336	(c)

Wie viel Zahlen hast du in vorstehendem Exempel?

Was ist das Ganze, was der Theil?

Was ist a? (Ein Theil von c.)

Was sagt dir b? (Wie oft ich den Theil a nehmen soll, um das Ganze zu bekommen.)

Was ist c? (Das Ganze.)

Wie entsteht c aus a?

Dadurch, daß ich a und b multiplizire.

Wie nennt man den Theil, welchen ich multiplizire, um das Ganze zu bekommen? (Multiplikandus) 2c.

Was ist der Multiplikandus, Multiplikator, das Produkt?

Den Multiplikandus und Multiplikator nennt man auch mit dem gemeinschaftlichen Namen „Faktoren", denn sie „machen" zusammen das Produkt.

Welches sind die Faktoren von 620, 1000 2c.

Wenn 336 = 3 × 112, so muß ich 112 wie oft von 336 subtrahiren können? Thue das!

336	
112 —	
224	
112 —	Probe.
112	
112 —	
000.	

Der Schüler würde sich also über eine Multiplikationsaufgabe also aussprechen:

209 × 3148?

Der Multiplikandus ist 3148. Diese Zahl ist ein Theil des noch unbekannten Produkts. Der Multiplikator ist 209, und sagt mir, wie oft ich den Theil 3148 nehmen soll, um das Ganze zu bekommen. Ich muß also 3148 209mal nehmen. Dies geschieht, indem ich 3148 erst mit 9 Einern multiplizire. Das Produkt der Einer ist 28,332. Hierauf multiplizire ich mit den Zehnern. Da keine vorhanden sind, so gehe ich zu den Hundertern, und multiplizire 3148 erst mit 2 Einern, und nehme dann dieses Produkt 100 mal. Weil dies aber schon dadurch geschieht, daß ich die Zahlen 2 Stellen weiter nach links rücke, so fange ich das Produkt der Hunderter in der dritten Stelle an. Das Produkt der Hunderter ist 6296,00 — 629,600. Ich finde das Gesammtprodukt, wenn ich das Produkt der Einer und Hunderter zusammenzähle.

Das Produkt 657,932 ist als das Ganze anzusehen, von dem ich den Theil 3148 209mal genommen habe.

Der Multiplikandus 3148 aber und der Multiplikator 209 sind als die Faktoren des Produktes 657,932 zu betrachten.

3148
209
28332
6296
657932

Man erwähne noch, daß man die **kleinere** Zahl als Multiplikator setzt, obschon es gleich viel ist, wie man die Faktoren folgen läßt. Ist $a \times b = c$, so ist auch $b \times a = c$.

312 (a)	113 (b)
113 (b)	312 (a)
936	226
312	113
312	339
35256 (c)	35256 (c).

Fünfte Stufe.

Das Dividiren.

Mündlich und schriftlich.

A. Ohne Rest.

1) Der Divisor einstellig:

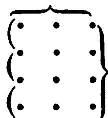
aa. Der Quotient unverändert.

a. Der Dividendus ebenfalls einstellig.

3 Einer sind in 6 Einern 2 mal (3 : 6 = 2)*).

---

*) Wir wechseln, wie schon im ersten Kursus geschah, mit dem Begriff des „Enthaltenseins" und „Theilens" ab, wie es die allseitige Betrachtung der Zahl fordert. Der Unterschied beider Begriffe besteht bekanntlich darin, daß beim „Theilen" eine Zahl gesucht wird, die der so vielte Theil vom Dividendus ist, als der Divisor anzeigt. Demnach heißt 3 : 12 = Welche Zahl ist der 3te Theil von 12? = Welche Zahl ist 3 mal in 12 enthalten? = Welche Zahl muß ich 3mal nehmen, um 12 zu bekommen? Antwort: 4, denn 12 = 3 × 4. — Beim „Enthaltensein" aber soll angegeben werden, wie vielmal ich den Divisor nehmen muß, um den Dividendus zu bekommen. Demnach heißt 3 : 12 = Wie oftmal steckt 3 in 12? = Wie vielmal muß ich 3 setzen, um 12 zu bekommen? = Wie vielmal kann ich 3 von 12 wegnehmen? Antwort: 4 mal, denn 12 = 4 × 3. Demnach ist dort 3 : 12 = 4, weil 3 × 4 = 12, hier 3 : 12 = 4 mal, weil 4 × 3 = 12. Weil aber beides unmittelbar zusammenhängt, wie sich das sogleich ergiebt, wenn man das angeführte Beispiel in Punkten veranschaulicht:



so würde die Anschauung des Theilverhältnisses einseitig, wenn man beide Begriffe isoliren wollte.

3 Zehner sind in 6 Z. 2 mal (30 : 60 = 2).
3 Hunderter sind in 6 H. 2 mal (300 : 600 = 2).
rc.

b. Der Dividendus zweistellig.
3 Einer in 18 Einern 6 mal (3 : 18 = 6).
3 Zehner in 18 Z. 6 mal (30 : 180 = 6).
3 Hunderter in 18 H. 6 mal (300 : 1800 = 6).
rc.

c. Der Dividendus dreistellig:
3 Einer in 186 E. 62 mal (3 : 186 = 62).
3 Zehner in 186 Z. 62 mal (30 : 1860 = 62).
3 Hunderter in 186 H. 62 mal (300 : 18600 = 62).
rc.

bb. Der Quotient nach dem Zehnergesetz wachsend.

a. Der dritte Theil von 6 Einern sind 2 E. (3 : 6 = 2).
Der dritte Theil von 6 Zehnern sind 2 Z. (3 : 60 = 20).
rc.

b. Der dritte Theil von 18 Einern sind 6 E. (3 : 18 = 6).
Der dritte Theil von 18 Zehn. sind 6 Z. (3 : 180 = 60).
rc.

c. $\frac{1}{3} \times$ 186 Einer = 62 E. (3 : 186 = 62).
$\frac{1}{3} \times$ 186 Zehner = 62 Z. (3 : 1860 = 620).
rc.

2) Der Divisor zweistellig:

aa. Der Quotient derselbe.

a. Der Dividendus auch zweistellig.
18 Einer in 54 E. 3 mal (18 : 54 = 3).
18 Zehner in 54 Z. 3 mal (180 : 540 = 3).
rc.

b. Der Dividendus dreistellig.
18 Einer in 108 E. 6 mal (18 : 108 = 6).
18 Zehner in 108 Z. 6 mal (180 : 1080 = 6).
rc.

bb. Der Quotient wachsend.

a. $\frac{1}{18} \times$ 54 E. (der 18te Theil von 54 Einern) = 3 Einer (18 : 54 = 3).
$\frac{1}{18} \times$ 54 Zehner = 3 Z. (18 : 540 = 30).
$\frac{1}{18} \times$ 54 Hunderter = 3 H. (18 : 5400 = 300).
rc.

b. $\frac{1}{18} \times$ 108 Einer = 6 E. (18 : 108 = 6).
$\frac{1}{18} \times$ 108 Zehner = 6 Z. (18 : 1080 = 60).
rc.

3) Der Divisor dreistellig:

aa. Quotient gleich.

a. Der Dividendus dreistellig.

114 Einer in 342 E. 3 mal (114 : 342 = 3).
114 Zehner in 342 Z. 3 mal (1140 : 3420 = 3).
2c.

b. Der Dividendus vierstellig.

506 Einer in 1012 E. 2 mal (506 : 1012 = 2).
506 Zehner in 1012 Z. 2 mal (5060 : 10120 = 2).

bb. Der Quotient wachsend.

a. $\frac{1}{114}$ × 342 Einer = 3 E. (114 : 342 = 3).
$\frac{1}{114}$ × 342 Zehner = 3 Z. (114 : 3420 = 30).
$\frac{1}{114}$ × 342 Hunderter = 3 H. (114 : 34200 = 300).

b. $\frac{1}{506}$ × 1012 Einer = 2 E. (506 : 1012 = 2).
$\frac{1}{506}$ × 1012 Zehner = 2 Z. (506 : 10120 = 20).

B. Mit Rest.

1) Der Divisor einstellig.

aa. Quotient gleich.

a. Dividendus auch einstellig.

3 Einer in 7 Einer 2 mal mit dem Rest von 1 E. (3 : 7 = 2 [1]).
3 Zehner in 7 Zehner 2 mal mit dem Rest von 1 Zehner (30 : 70 = 2 [10]).
3 Hunderter in 7 Hunderter 2 mal mit dem Rest von 1 H. (300 : 700 = 2 [100]).

b. Dividendus zweistellig.

3 Einer in 25 E. 8 mal mit dem Reste von 1 E. (3 : 25 = 8 [1]).
3 Zehner in 25 Zehner 8 mal mit dem Reste von 1 Zehner (30 : 250 = 8 [10]).
2c.

Der Lehrer wird diese Uebungen leicht nach A. fortführen können. Hierauf Exempel für das Schnellrechnen, z. B.:
$\frac{1}{16}$ × 48 wie oft in 120?
$\frac{1}{509}$ × 1018 getheilt durch 2 ist welcher Theil von 100?
$\frac{1}{4}$ × 9600 getheilt durch 2 steckt wie oft in 96 Hunderten?
800 in 8000, den Quotient 3 mal, die Hälfte — 16 mal ist das Wievielfache von 12?
3 × 120 : 6 × 5 : 15 × 4 : 16?
18 : 55, den Rest 9 mal, wie oft in 5409? u. a. m.

Schema für das schriftliche Dividiren.

A. Ohne Rest.

1) Divisor einstellig.

a. Dividendus ohne Nullen.

3 : 15936 = 3 : 15000 + 900 + 30 + 6.
3 : 15000 = 5000
3 : 900 = 300
3 : 30 = 10
3 : 6 = 2
3 : 15936 = 5312.

Kürzer:

```
3 : 15936 = 5000
    15000    300
    -----
      936     10
      900      2
    -----  ------
       36   5312
       30
    -----
        6
        6
    -----
```

Kürzer:

```
3 : 15936 = 5...        oder:   3 : 15936 | 5312
    15...    3..                    15...
    -----                           -----
      9..    1.                       9..
      9..     2                       9..
    -----  -----                    -----
       3.  5312                        3.
       3.                              3.
    -----                           -----
        6                               6
        6                               6
    -----                           -----
```

Am kürzesten:

```
   15936 das Ganze
3) 5312 der Theil
```

oder in Bruchform:

$$\frac{15936}{3} = 5312.$$

```
6 : 49686 | 8...        oder:   6 : 49686 | 8281
    48000    2..                    48...
    -----                           -----
     1686    8.                      16..
     1200     1                      12..
    -----  -----                    -----
      486  8281                       48.
      480                             48.
    -----                           -----
        6                               6
        6                               6
    -----                           -----
```

in Bruchform: $\frac{49686}{6} = 8281$

b. Der Dividendus mit Nullen.

```
8 : 650 048 | 80000
    640 000    1000
    -------
     10 048     200
      8 000      50
    -------
      2.084       6
               -----
      1 600   81256
    -------
        448
        400
    -------
         48
         48
    -------
```

Ich suche zuerst den 8ten Theil von 65 Zehntausendern — sind 8 Zehnt. 8 mal 8 Zehnt. sind 64 Zehnt., 64 Zehnt. von 65 Zehnt. weggenommen, bleibt 1 Zehnt. = 10 Taus. Der 8te Theil von 10 T. ist 1 T. ꝛc.

```
8 : 650048 | 81256
    64....   .....
    ------
     10...
      8...
    ------
      20..
      16..
    ------
       44.
       40.
    ------
        48
        48
```

Wie viel ist der 8te Theil von 664800?

```
8 : 664800 | 83100
    64....   .....
    ------
     24...
     24...
    ------
       8..
       8..
    ------
        00
```

c. Der Divisor ebenfalls mit Nullen.

10 : 664800 = 10 : 600,000 + 60,000 + 4000 + 800.

```
10 : 60000|0 = 60000
10 :  6000|0 =  6000
10 :   400|0 =   400
10 :    80|0 =    80
--------------------
10 : 66480|0 = 66480
```

„So viel Nullen von einer Zahl weggenommen werden, um so viel mal wird sie durch 10 dividirt, denn sie kommt um so viel mal in eine niedere Ordnung.“

```
80̸ : 66480̸0̸ | 8310
 64...
 -----
  24..
  24..
  ----
   8.
   8.
  ---
    0
    0
   --
```

```
10̸0̸ : 66480̸0̸ = 6648
80̸0̸ : 66480̸0̸ | 831 = 66480̸0̸ / 80̸0̸ = 831
  64..
  ----
   24.
   24.
   ---
    8
    8
   --
```

B. Mit Rest.

a. (Wie bei A.) 7 : 59634

59634 = 59000 + 600 + 30 + 4.

```
7 : 59000 = 8000 ⎫
    56000        ⎪
    -----        ⎪
     3000        ⎪
   +  600        ⎪
   ------        ⎪
7 :  3600 =  500 ⎪
     3500        ⎪
     ----        ⎪
      100        ⎬ = 8519 1/7
   +   30        ⎪
   ------        ⎪
 7 :  130 =   10 ⎪
       70        ⎪
      ---        ⎪
       60        ⎪
   +    4        ⎪
   ------        ⎪
  7 :  64 =    9 ⎭
       63
      ---
  7 :   1 = 1/7
```

```
7 : 59634 | 8519 1/7
    56...     ....
    -----
     36..
     35..
     ----
      13.
       7.
      ---
       64
       63
       --
       1/7
```

Oder: $\frac{59934}{7} = 8519\frac{1}{7}$.

b. $9 : 735040 \mid 8167\frac{1}{9}$

```
   72....
   15...
    9...
    60..
    54..
     64.
     63.
      10
       9
```

$\frac{1}{9}$

$$\frac{735040}{9} = 8167\frac{1}{9}$$

c. 9Ø : 73504Ø | $8167\frac{1}{9}$

```
   72...
    15..
     9..
     60.
     54.
      64
      63
```

$\frac{1}{9}$

$$\frac{735040}{90} = \frac{73504}{9} = 8167\frac{1}{9}$$

9ØØ : 73504Ø $= \frac{73504}{9}$

9ØØ : 73504ØØ $= \frac{73504}{90} = 816\frac{64}{90}$

90 : 735 04 | $816\frac{64}{90}$

```
   720 00
    15 04
     9 00
     6.04
     5 40
```

$\frac{64}{90}$

In der angedeuteten Stufenfolge kann nun der Lehrer leicht die Uebungen weiter führen, darauf haltend, daß der Schüler sich stets klar und schnell über seine Operation ausspreche.

Begriff des Dividirens.

Der Lehrer knüpft an das Multipliziren an. Wie findet man das Dreifache von 1260?

Wenn man 1260 3 mal nimmt.

Thue das!

1260	a
3	b
3780	c

Wenn du a, b und c vergleichst, was ist
c? (Das Ganze.)
a? (Ein Theil vom Ganzen.)
b? (Die Zahl, welche mir sagt ꝛc.)

Setze a als unbekannt und zu finden.
Ich finde a, wenn ich mit b in c dividire.

Thue das!

```
(b)   (c)    (a)
 3 : 3780 | 1260
     3...
     ----
      7..
      6..
     ----
      18.
      18.
     ----
        0
```

„Das Ganze heißt der Dividendus oder die zu theilende Zahl; die Zahl, mit welcher ich das Ganze theile, um den unbekannten Theil desselben zu finden, der Divisor oder Theiler, und der gesuchte Theil Quotient. Also

c = Dividendus,
b = Divisor,
a = Quotient."

Wie heißen a und b, insofern ich durch ihre Multiplikation das Ganze bekomme?
Faktoren.

Was ist mir also in einem Divisionsexempel gegeben?
Das Ganze (Produkt) und ein Faktor.

Was soll ich finden?
Den andern Faktor.

Wie geschieht das?
Wenn ich mit dem bekannten Faktor das Produkt theile.

Wenn a der bekannte Faktor ist, wie findest du b?
Wenn ich mit a in c theile.

Thue das!

```
1260 : 3780 | 3
       3780
       ----
```

Wie oft steckt also der Quotient im Dividend?
3 mal.

Welche Zahl sagt mir das?
Der Divisor.

Wie oft muß ich also a von c wegnehmen können?
So viel mal wie b anzeigt.

Thue das!

```
37 80
12 60
-----
25.20
12 60
-----
12 60
12 60
-----
```

Demnach würde der Schüler über eine Aufgabe, wie die obige:
Welche Zahl steckt 3 mal in 3780?
sich also auszusprechen im Stande sein müssen:

„Die Zahl, welche 3 mal in 3780 steckt, muß der 3te Theil von 3780 sein. Ich finde den 3ten Theil von 3780, wenn ich mit 3 in 3780 dividire. Der Divisor 3 ist als der bekannte Faktor zu betrachten, der Dividendus 3780 als das Produkt, und der Quotient ist der unbekannte Faktor, welcher eben gefunden wird, wenn ich mit dem bekannten Faktor das Produkt theile.

3780 = 37 Hunderter und 8 Zehner. Der 3te Theil von 37 H. = 12 H. mit dem Reste von 1 H.; dazu kommen 8 Z., macht 18 Z.; der 3te Theil von 18 Z. = 6 Z., also ist der 3te Theil von 3780 = 12 H. + 6 Z. = 1260 E. Der Quotient 1260 ist also die Zahl, welche 3 mal in 3780 steckt. Darum muß sich auch 1260 3 mal von 3780 abziehen lassen."

A. Rechnen mit benannten Zahlen.

Es bedarf hierzu keiner besonderen Anleitung mehr, weder für den Lehrer, welcher in einem guten Exempelbuche den methodisch geordneten Stoff vor sich hat, noch für den Schüler, der die ihm vorgelegten Aufgaben ohne alle Schwierigkeit rechnet. Nur darauf möchte hier hinzuweisen sein, daß der Lehrer fortwährend neben der Fertigkeit in der Operation auch die Allseitigkeit der Anschauung im Auge behalte, und auf jeder Stufe immer erst einige Aufgaben mündlich recht tüchtig durcharbeite, und zum fertigen sprachlichen Ausdrucke bringe, ehe das Tafelrechnen eintritt. Es können recht füglich die Tafelrechen-Exempel in kleineren Zahlen ausgedrückt vorher als Kopfrechen-Exempel durchgerechnet werden.

Wir geben hier als Maaßstab des Geforderten einige mehrseitig behandelte Aufgaben.

1. Addiren.

Wie viel Glockenschläge thut die Stadtuhr in 24 Stunden?*)

(Vergl. S. 88.)

a. Was ist dir in dem Exempel gegeben?

Die Zeit, in welcher die Glockenschläge geschehen, nämlich 24 Stunden.

*) Diesterweg und Heuser, praktisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürgerschulen, 12te Auflage S. 18.

Was weißt du von den Glockenschlägen der Uhr?

Die Uhr schlägt in der ersten Stunde 1., in der zweiten 2 mal, u. s. f. bis 12; dann fängt sie wieder an 1 mal zu schlagen u. s. f. bis wieder 12.

b. Wonach ist gefragt?

Nach der Anzahl der Glockenschläge, welche die Uhr in 24 Stunden thut.

Weil die Uhr nur bis 12 schlägt, so wirst du erst was berechnen?

Die Anzahl der Glockenschläge in 12 Stunden.

Und wie findest du daraus die Anzahl der Glockenschläge in 24 Stunden?

Wenn ich die Summe der Glockenschläge in 12 Stunden 2 mal nehme.

c. Wie viel beträgt die Anzahl der Glockenschläge in 12 Stunden?

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78 Schläge.

Wie viel beträgt ꝛc. in 24 Stunden?

2 × 78 = 156 Schläge.

1) Wie verhält sich die Anzahl der Glockenschläge von 24 Stunden zu den von 12 Stunden?

2) Wie viel beträgt der Unterschied der Glockenschläge der ersten 11 Stunden von denen der zwölften Stunde?

3) Wie viel Glockenschläge hat die Uhr nach der 15ten Stunde gethan?

78 + 1 + 2 + 3 = 84 Schläge.

2. Subtrahiren.

Das Vermögen eines Mannes bestand vor einem Brande in 34580 Thalern, und nach demselben in 6594 Thlrn. Wie viel hatte er durch das Brandunglück verloren?*)

a. Woraus siehst du schon, daß der Mann durch das Brandunglück verloren hat?

Daraus, daß er vor dem Brande mehr Geld hatte, als nach dem Brande.

Wie viel hätte er nach dem Brande im Vermögen haben müssen, wenn er sagen wollte, er habe nichts verloren?

Er hätte nach dem Brande auch 34580 Thaler haben müssen.

Wie viel hatte er aber bloß?

Er hatte bloß noch 6594 Thaler.

b. Was wird er seinen Verlust nennen, wenn er sein Geld nach dem Brande zählte, und bloß 6594 Thaler herausbekam?

Das, was ihm von dieser Summe an den 34580 Thalern fehlte.

Wonach ist gefragt?

Wie viel ꝛc. kannst du das nach deiner früheren Antwort ausdrücken?

Wie viel mußte der Mann noch zu den 6594 Thalern zählen, um 34580 Thlr. zu bekommen?

*) Prakt. Rechenbuch ꝛc. S. 21.

c. Wie findest du das?
Wenn ich von 6594 Thlrn. bis zu 34580 Thlrn. hinaufzähle — oder wenn ich von 34580 Thlrn. 6594 Thlr. abziehe.

Thue das Erstere!

6594 sind 65 Hunderter und 94 Einer, ich mache das 66ste Hundert voll, indem ich zu 94 noch 6 E. zähle. Da 34580 = 345 H. + 80 E., so muß ich zu 66 H. noch 34 + 245 H. + 80 E. haben; 34 + 245 = 279 H., zu den 80 E. kommen noch jene 6 E. = 86 E. Also muß ich zu 6594 noch 279 H. + 86 E. = 27986 zählen, um rc. Also hatte der Mann 27986 Thlr. verloren.

1) Wie kannst du den Verlust des Mannes durch die im Exempel gegebenen Zahlen ausdrücken?
Der Mann hatte 34580 — 6594 Thlr. verloren.

Oder der Verlust war gleich welchem Unterschiede?
Gleich dem Unterschiede des früheren und späteren Vermögens.

2) Bezeichne auf ähnliche Weise die Summe, welche er mehr verloren hatte, als das übrig gebliebene Vermögen betrug.

3) Setze den Verlust als bekannt, das spätere Vermögen als unbekannt. Wie lautet nun die Aufgabe?

Das Vermögen eines Mannes vor einem Brande bestand in 34580 Thalern. Durch das Brandunglück verlor er 27986 Thlr. Wie viel hatte er nun noch im Vermögen?

Wie berechnest du das?

4) Setze auf ähnliche Weise den Betrag des ersten Vermögens als unbekannt!

3. Multipliziren.

Ein Kaufmann kauft 3900 Centner Waare zu 36 Thalern, und verkauft die Waare wieder, den Centner zu 42 Thlrn. Wie viel gewann er bei diesem Handel?*)

a. Was ist von dem Kaufmann gesagt?
Er kaufte 3900 Centner zu 36 Thlrn.

Was heißt das zu?
Ein Ctr. kostete 36 Thlr.

Was ist ferner gesagt?
Er verkaufte 1 Ctr. zu 42 Thlrn.

Welches ist also der Einkaufspreis für 1 Ctr., und welches der Verkaufspreis?

b. Was findest du, wenn du beide Preise mit einander vergleichst?
Der Verkaufspreis beträgt mehr als der Einkaufspreis.

Wie nennt der Kaufmann das, was er im Verkauf mehr bekommt?
Seinen Gewinn.

Wie viel beträgt hier der Gewinn auf 1 Ctr.?
6 Thlr.

Wie findest du das?
Wenn ich den Einkaufspreis von dem Verkaufspreise abziehe.

*) S. a. a. O. S. 25.

Was ist aber in der Aufgabe gefragt?
Wie viel er in dem Handel gewann.

Das heißt an wie viel Centnern?
An 3900 Centnern.

Was weißt du schon von dem Gewinn des Kaufmanns?
Daß er an 1 Ctr. 6 Thlr. gewonnen hat.

Wie findest du nun den ganzen Gewinn?
Wenn ich 3900 × 6 nehme.

Thue das!
3900 × 6 = 6 × 3900 = 6 × 39 H. = 6 × 30 H. + 6 × 9 H. = 180 H. + 54 H. = 234 H. = 23400. Also zc.

1) Wie viel betrug die ganze Einkaufssumme?
Wie viel der ganze Verkauf? Was war also der ganze Gewinn?

2) Setze den Gewinn an 1 Ctr. als bekannt, den Preis des Verkaufs als unbekannt. (a) — oder den Preis des Einkaufs als unbekannt (b) — oder den ganzen Gewinn, nebst dem Einkaufs- und Verkaufspreise als bekannt, und die Anzahl der Ctr. als unbekannt (c) — welche Aufgaben entstehen daraus?

3) Wenn der Kaufmann nur 11700 Thaler gewonnen hätte, wie theuer hätte er da den Ctr. verkauft?

Wenn er an 3900 Ctr. 11700 Thlr. gewann, so gewann er an 1 Ctr. den 3900sten Theil von 11700 Thlr. = $\frac{1}{39}$ × 117 (dem 39sten Theile von 117) = 3 Thaler. Da er 1 Ctr. zu 36 Thlr. einkaufte, so mußte er ihn zu 36 + 3 = 39 Thlr. verkaufen.

4. Dividiren.

Ein Gärtner arbeitete eine Woche in einem Garten, und erhielt dafür 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.; wie viel war sein Tagelohn?*)

a. Gegeben ist mir die Arbeitszeit = 6 Tage, und das Arbeitslohn = 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.

b. Es soll gesucht werden das Tagelohn, oder das Arbeitslohn für 1 Tag.

c. Wer in 6 Tagen 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. verdient, verdient in einem Tage den 6ten Theil von 2 Thlrn. 22 Sgr. 6 Pf. Der 6te Theil von 2 Thlrn. = 10 Sgr., der 6te Theil von 22 Sgr. 6 Pf. = dem 6ten Theil von 18 guten Gr. = 3 gGr. = 3 Sgr. 9 Pf., 10 Sgr. + 3 Sgr. 9 Pf. = 13 Sgr. 9 Pf.; also zc.

1) Ein Gärtner erhielt zum Tagelohn 13 Sgr. 9 Pf., wie viel betrug sein Wochenlohn?**)

2) Ein Gärtner, der zum Tagelohn 13 Sgr. 9 Pf. erhielt, hatte sich 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. verdient. Wie lange hatte er gearbeitet?

13 Sgr. 9 Pf. = 10 Sgr. + 3 Sgr. 9 Pf. = 8 gGr. + 3 gGr. = 11 gGr. 22 Sgr. 6 Pf. = 18 gGr., also 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. = 48 gGr. + 18 gGr. = 66 gGr. 11 gGr. in 66 gGr. = 6 mal.

*) a. a. O. S. 44.
**) Der Schüler wird angeleitet, diese Variationen überall selbst zu bilden.

3) Vergleiche das Wochenlohn des Gärtners mit seinem Tagelohn!
Das Wochenlohn betrug 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. — 13 Sgr. 9 Pf., mehr? und das Tagelohn 2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. — 13 Sgr. 6 Pf., weniger? Das Wochenlohn war das 6fache des Tagelohns, das Tagelohn war der 6te Theil des Wochenlohns.

5. Gemischte Aufgaben.

1) Zwei Kaufleute, A. und B., vergleichen ihren Gewinn bei einem Meßhandel. B. sagt zu A.: Die Hälfte deines Gewinnes ist das Drittel des meinigen. A. hatte 605 Thaler gewonnen; wie viel B.?

a. Was weißt du von dem Gewinne des A.?
Er beträgt 605 Thaler.

Was weißt du von dem Gewinne des B.?
Es ist der dritte Theil des Gewinnes von B. gleich der Hälfte des Gewinnes von A.

b. Wenn ich den dritten Theil des Gewinnes von B. wüßte, was könnte ich da leicht finden?
Den ganzen Gewinn von B.

Wie viel betrüge der ganze Gewinn von B.?
Dreimal das Drittel.

Es ist uns aber gesagt, daß welche Summe gleich sei dem Drittel des Gewinnes von B.?
Die Hälfte des Gewinnes von A.

Wie viel beträgt diese?
$\frac{605}{2}$ Thlr. = 302 Thlr. 15 Sgr.

c. Wie groß ist also der Gewinn des B.?
3×302 Thlr. 15 Sgr. = 907 Thlr. 15 Sgr.

1) B. hatte auf der Messe $907\frac{1}{2}$ Thlr. gewonnen; A. sagte: das Drittel deines Gewinnes ist gleich der Hälfte des meinigen. Wie viel betrug der Gewinn des A.?

2) Zwei Kaufleute verglichen ihren Gewinn, und es fand sich, daß der Gewinn von B. noch um die Hälfte des Gewinnes von A. größer war. Dieser hatte 605 Thaler gewonnen, wie viel jener?

Der Gewinn des B. = 605 Thlr. + $\frac{605}{2}$ Thlr. = 605 Thlr. + 302 Thlr. 15 Sgr. = 907 Thlr. 15 Sgr.

3) Zwei Kaufleute ꝛc., und es fand sich, daß A. den dritten Theil des Gewinnes von B. weniger gewonnen hatte als B., dessen Gewinn $907\frac{1}{2}$ Thaler betrug.

4) Zwei Kaufleute ꝛc. Das, was A. zweimal gewonnen hatte, hatte B. dreimal gewonnen, dessen Gewinn $907\frac{1}{2}$ Thlr. war.

5) A. und B. vergleichen ihren Gewinn; $\frac{2}{3}$ des Gewinnes von B. sind gleich dem ganzen Gewinne von A. B. aber hatte $907\frac{1}{2}$ Thlr. gewonnen. Wie viel A.?

Gewinn von A. = $\frac{2}{3} \times 907\frac{1}{2}$ Thlr. 1 mal der 3te Theil von 907 Thlrn. = 302 Thlr. mit dem Reste von 1 Thlr., dazu der halbe Thaler, bleiben noch

45 Sgr. durch 3 zu theilen. Der dritte Theil von 45 Sgr. = 15 Sgr. Also $\frac{1}{3} \times 907\frac{1}{2}$ Thlr. = 302 Thlr. 15 Sgr., folglich $\frac{2}{3} \times 907\frac{1}{2}$ Thlr. = 2×302 Thlr. 15 Sgr. = 605 Thlr. = dem Gewinne des A.

2) Drei Personen theilen sich in 4 Centner 20 Kilogramm so, daß A. 15 Kilo und B. 10 Kilo mehr nimmt als C. Wie viel bekommt Jeder?

Das, was A. und B. mehr nehmen, wollen wir gleich abziehen. Es beträgt 15 Kilo und 10 Kilo = 25 Kilo oder ein halber Centner. Dieser, von 4 Centner weggenommen, läßt $3\frac{1}{2}$ Centner oder 3 Centner 25 Kilo. Dazu kommen die 20 Kilo, macht 3 Centner 45 Kilo. Diese werden in 3 gleiche Theile getheilt. Der 3te Theil von 3 Centner ist 1 Centner, der dritte Theil von 45 Kilo 15 Kilo. C. bekommt also 1 Centner 15 Kilo; B. 10 Kilo mehr, macht 1 Centner 25 Kilo, u. A. 15 Kilo mehr, macht 1 Centner 30 Kilo.

1) Drei Personen haben sich in eine Waare dergestalt getheilt, daß A. 5 Pfd. mehr bekommen hat, als B., und B. 10 Pfd. mehr als C. Der Antheil von B. betrug 155 Pfd. Wie viel der ganze Vorrath?

B. hat 155 Pfd. bekommen, also empfing A. 155 Pfd. + 5 Pfd. = 160 Pfd., und da C. 10 Pfd. weniger bekam, als B., so kam auf C. 155 — 10 Pfd. = 145 Pfd. Der ganze Vorrath betrug also 160 Pfd. + 155 Pfd. + 145 Pfd. = 460 Pfd. = 220 Kilo = 4 Centner 20 Kilo.

2) Drei Personen haben sich in 4 Ctr. 20 Kilo so getheilt, daß A. 5 Kilo mehr erhalten hat, als B., und C. 10 Kilo weniger, als B. Wie groß ist der Antheil eines Jeden?

Erhielt C. 10 Kilo weniger, als B., so erhielt A. 15 Kilo mehr, als C., und B. 10 Kilo mehr, als C. Das, was A. und B. mehr bekamen, als C., war also 25 Kilo &c.

Eine dem vorstehenden Exempel nachgebildete Aufgabe würde sein:

An einem Baue arbeiten 12 Arbeiter — 4 Zimmerleute und 8 Maurer. Die Zimmerleute bekommen jeder täglich 4 Groschen mehr, als die Maurer. Das Tagelohn aller Arbeiter beträgt 12 Thaler. Wie viel bekommt ein Zimmermann und wie viel ein Maurer?

Das, was die Zimmerleute mehr bekommen, ist 4×4 Gr. = 16 Gr. Das nehmen sie erst weg, und theilen sich dann mit den Maurern zu gleichen Theilen.

3) N. kaufte sich Tuch zu einem neuen Rocke, wovon die Elle $4\frac{1}{2}$ Gulden kostete. Er bezahlte im Ganzen 12 Thlr., wie viel Ellen hatte er zu seinem Rocke genommen?

a. Was ist dir bekannt?

Der Preis von 1 Elle.

Was ist dir ferner gegeben?

Der Preis aller Ellen.

Was kennst du aber nicht?

Die Anzahl der Ellen.

Du weißt aber, daß N. wie oft vom Kaufmann eine Elle nehmen konnte?

So oft er ihm $4\frac{1}{2}$ Gulden hinlegte.

b. Wie viel Ellen konnte also N. für sein Geld verlangen?

So viel Ellen als er $4\frac{1}{2}$ Gulden hatte.

Wie viel Geld hatte er?

12 Thaler.

c. Wie findest du also aus dem Preise einer Elle und der ganzen Summe die Anzahl der Ellen?

Wenn ich mit dem Preise von 1 Elle, nämlich $4\frac{1}{2}$ Gulden, in die ganze Summe, nämlich 12 Thlr., dividire.

Thue das!

$4\frac{1}{2}$ Gulden = $(4 \times 20) + 10$ Sgr. = 90 Sgr. = 3 Thaler. 3 Thaler stecken in 12 Thalern 4 mal.

Daraus folgt?

Es folgt daraus, daß N. 4 Ellen kaufte.

1) N. nahm Tuch zu einem Rocke, und bezahlte für die Elle $4\frac{1}{2}$ Gulden. Wie viel Thaler bezahlte er dem Kaufmann, wenn er 4 Ellen von ihm nahm?

2) In welchem Verhältnisse steht die Anzahl der Ellen zu dem Preise von 1 Elle, und die Anzahl der Ellen zu dem ganzen Preise?

3) N. nahm sich (zu einem Rocke) beim Kaufmann 4 Ellen Tuch, und bezahlte dasselbe mit 12 Thalern. Welches war der Preis von 1 Elle?

4) B. nahm von derselben Sorte Tuch, brauchte aber $4\frac{1}{4}$ Ellen. Wie viel mußte der bezahlen?

a. Wenn hätte er eben so viel als A. bezahlt?

Wenn er bloß 4 Ellen genommen hätte.

Wie viel hätte er da auch dem Kaufmann gegeben?

$4 \times 4\frac{1}{2}$ Gulden = 12 Thaler.

Wie viel mußte er ihm nun aber mehr bezahlen als A.?

Das, was die Viertel-Elle kostete.

b. Wie viel bezahlte er also überhaupt dem Kaufmann?

$4 \times 4\frac{1}{2}$ Gulden, und $\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{2}$ Gulden. $4 \times 4\frac{1}{2}$ Gulden = 12 Thaler, $\frac{1}{4} \times 4$ Gulden = 1 G., $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ G. = $\frac{1}{4} \times 8$ gGr. = 2 gGr. = 2 Sgr. 6 Pf., 1 G. + 2 Sgr. 6 Pf. = 22 Sgr. 6 Pf. Also bezahlte B. 12 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.

Wenn der Lehrer auf diese Weise durch langsames (gründliches) Durcharbeiten einiger Aufgaben das Bewußtsein des Schülers bildet, dann bedarf es auch keiner so großen Masse von Aufgaben für das Schnellrechnen. Fertigkeit und Schnelligkeit im Orientiren ist nie ohne vorhergegangene allseitige Uebung der Anschauung zu erlangen. Eine einzige Aufgabe, mit Verstand aufgelöst, hat mehr Werth als ein Dutzend anderer mechanisch hintereinander gerechnet, und mit deren Lösung es alsbald stocken würde, wenn man die Bedingungen der Aufgabe etwas vom Schema abweichend gestaltete. Die in manchen Schulen, besonders bei Gelegenheit der Prüfungen, zur Schau gestellte Fertigkeit im Schnellrechnen ist oft bloß Schein und Blendwerk, eingeschulter Mechanismus in einer bekannten Form, der verschwindet, sobald diese „Form" aufgehoben wird. —

Dritter Kursus.

Das Rechnen mit Brüchen.

Viertes Jahr.

Erstes Semester.

Allseitige Anschauung des Bruches.

(Denkrechnen.)

Vorbemerkungen.

1) Wie der Schüler zur Anschauung der ganzen Zahlen gelangte, indem er sie auf die Eins zurückführte, d. h. sie als Vielfache eines Einfachen erkannte, so werden ihm jetzt auch die Bruchzahlen anschaulich gemacht durch ihre stete Beziehung auf die Einheit, aus der sie entstanden.

2) Während aber bisher die Eins als Theil der ganzen Zahlen erschien, wird sie nunmehr selbst als ein Ganzes, mithin als ein Vielfaches aufgefaßt, das in seine einfachen Bestandtheile aufgelöst wird, welche wir eben mit Beziehung auf ihr Ganzes „Brüche" nennen.

3) Weil der Schüler bereits vom ersten Kursus an die ganzen Zahlen als Brüche zu behandeln gelernt hat, indem er sie als Theile eines Vielfachen erkannte, so wird die nun folgende Behandlung des eigentlichen Bruches (der gebrochenen Einheit) um so weniger Schwierigkeit für ihn haben, als der Prozeß ganz derselbe ist, durch welchen er in das Rechnen mit ganzen Zahlen eingeführt wurde, nämlich: Anschauung des Mannigfaltigen in seiner organischen Einheit.

4) Da die Verschiedenheit der Brüche bedingt ist durch ihre Größe, die Größe aber durch die Anzahl der gleichen Theile, in welche ich die Einheit zerfälle, so lassen sich diese verschiedenartigen Theilungen als besondere Ordnungen, und zwar als absteigend niedere Ordnungen betrachten, wie bei den ganzen Zahlen durch das Verzehnfachen der Einheit die aufsteigend höheren Ordnungen des Einers, Zehners, Hunderters ꝛc. sich bildeten. Jene verschiedenen Bruch-Einheiten bezeichnet die Sprache durch die Nachsilbe „tel", als Zweitel*), Drittel, Viertel ꝛc.

5) Demnach ist uns der Eintheilungsgrund des für die Anschauung zu organisirenden Stoffes in diesem Kursus objektiv in der Verschiedenheit der Brüche selber gegeben, und wir behandeln auf der ersten Stufe die Halben, auf der zweiten die Drittel u. s. f., bis der Schüler durch diese organische Entwickelung seiner Anschauung zur Beobachtung des Bruches gelangt ist, wozu etwa 4 Stufen vollkommen ausreichen.

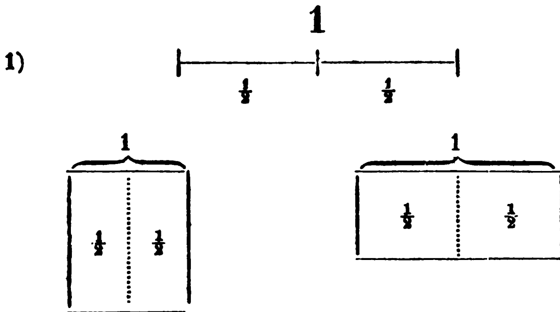
*) Weil die Theilung eines Ganzen in 2 gleiche Theile die am meisten im Leben vorkommende ist, so hat die Sprache für diese Theile ein eigenes Wort gebildet, nämlich Halbe oder Hälften.

6) Da wir — wie in den früheren Kursen — mit der allseitigen Anschauung des Objektes beginnen, so üben wir auf jeder Stufe in der bekannten Weise mündliches und schriftliches, reines und angewandtes Rechnen, Addiren und Subtrahiren ꝛc. zusammen, und behandeln ganz dem bisherigen Gange analog den Bruch unter den Rubriken:

1) Anschauung der reinen Zahl.
   a. Messen,
   b. Vergleichen,
   c. Kombiniren.
2) Anwendung des reinen Zahlverhältnisses nach allen Spezies.

Erste Stufe.

Die Halben.



Wenn ich Eins (ein Ganzes) in zwei gleiche Theile zerlege*), so erhalte ich 2 Halbe (Hälften). Ein Halbes ist einer von den 2 gleichen Theilen, in die ich das Ganze getheilt habe.

$$2 : 1 = \tfrac{1}{2} \text{ oder } \tfrac{1}{2} \times 1 = \tfrac{1}{2}.$$

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$
b. $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 \times \frac{1}{2} = 1.$
c. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$
d. $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} : 1 = 2$ ($\frac{1}{2}$ in 1 steckt 2 mal).

---

*) Bei der Entstehung des Bruches tritt der Begriff des „Theilens" ein, bei der Divisicn mit Brüchen bleibt aber der Begriff des „Enthaltenseins" die elementare Basis, worauf alle übrige Darstellungsformen der Division zurückzuführen sind. Weil ich aber dort (beim Theilen des Ganzen in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile) die Einheit zu zerlegen habe, so ist klar, daß ich keine Zahl durch $\frac{1}{5}$ oder $\frac{3}{4}$ „theilen" kann, und daß es Unsinn wäre, die Aufgabe $\frac{2}{3}$: 4 aufzufassen, als: theile 4 durch $\frac{2}{3}$, oder welches ist der $\frac{2}{3}$ste Theil von 4? Ich muß vielmehr die andere Frage des Theilens (vergl. die Anmerk. S. 99) hier substituiren: Von welcher Zahl ist vier 2mal der dritte Theil? und weil ich zu dieser Frage nur durch die Reflexion auf meine Thätigkeit gelange, nachdem ich auf dem Wege der Anschauung erkannt habe, wie oft $\frac{2}{3}$ in 4 steckt, so ist klar, warum das Dividiren mit einem Bruche nur durch das Enthaltensein anschaulich zu lösen sei.

Anwendung auf die Vielfachen.

α. Ist $2:1 = \frac{2}{2}$, so ist $2:2 = \frac{4}{2}$, $2:3 = \frac{6}{2}$, $2:10 = \frac{20}{2}$, $2:100 = \frac{200}{2}$ rc.

aa. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (anderthalb), $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ (drittehalb), $3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ (viertehalb) rc., $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, $2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$, $12\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 13$ rc., $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3$ (denn $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$, oder $1 + 1 = 2$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $2 + 1 = 3$), $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$ rc., $7\frac{1}{2} + 8 = 15\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} = 16$, $8 + 8\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$.

bb. $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $10 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$, $100 \times \frac{1}{2} = \frac{100}{2} = 50$; $7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$, $73 \times \frac{1}{2} = \frac{73}{2} = 36\frac{1}{2}$ rc.

$1 \times 1\frac{1}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $2 \times 1\frac{1}{2} = 2 \times \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $3 \times 1\frac{1}{2} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ rc. (oder: $3 \times 1 = 3$, $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$) rc

$6 \times 15\frac{1}{2} = 6 \times 15 + 6 \times \frac{1}{2}$ rc. $9 \times 80\frac{1}{2}$ rc.

Ist $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$, so ist

$\frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{1}{2} \times 9 = 4\frac{1}{2}$ rc.

cc. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (denn $2 = 1 + 1$; $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$), $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ (denn $3 = 2 + 1$; $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$) rc. $2 - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (denn $2 - 1 = 1$, $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$), $6 - 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (denn $6 - 4 = 2$, $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$), $9 - 3\frac{1}{2}$ rc. $2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$ ($= [2 - 1] + \frac{1}{2}$), $6\frac{1}{2} - 3 = 3\frac{1}{2}$ ($= [6 - 3] + \frac{1}{2}$) rc. $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 1$ ($3 - 2 = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$; oder: $3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$) $8\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}$? rc.

dd. $\frac{1}{2} : 1 = 2$ (denn $1 = \frac{2}{2}$, $\frac{1}{2} : \frac{2}{2} = 1 : 2 = 2$[mal]).

$\frac{1}{2} : 4 = 8$ (denn $4 = \frac{8}{2}$, $\frac{1}{2} : \frac{8}{2}$ rc., oder $\frac{1}{2} : 1 = 2$, $\frac{1}{2} : 4 = 4 \times 2 = 8$) rc.

$\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = 1 : 3 = 3$. $\frac{1}{2} : 9\frac{1}{2} = 19$ rc.

$1\frac{1}{2} : 6 = \frac{3}{2} : \frac{12}{2} = 3 : 12 = 4$.

$3\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2} = \frac{7}{2} : \frac{21}{2} = 7 : 21 = 3$ rc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit 1!

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ = der Hälfte von 1, 1 = dem Zweifachen von $\frac{1}{2}$.

b. Welche Zahl nennt mir den Unterschied von $\frac{1}{2}$ und 1?

Wie viel muß ich von 16 wegnehmen, um $9\frac{1}{2}$ zu bekommen?

Von 2 Zahlen heißt die eine $9\frac{1}{2}$, der Unterschied von der größeren ist $6\frac{1}{2}$, wie heißt die größere Zahl?

Nenne andere Zahlenpaare, welche $6\frac{1}{2}$ zum Unterschiede haben!

c. Wie oft muß ich $\frac{1}{2}$ nehmen, um 1 zu bekommen?

Wie oft $4\frac{1}{2}$, um 9 zu erhalten?

Von welcher Zahl ist $4\frac{1}{2}$ die Hälfte?

Von welcher Zahl ist 9 das Zweifache?

Der Divisor ist $4\frac{1}{2}$, der Quotient 2, wie heißt der Dividendus?

Der Quotient 2 sagt mir, daß $4\frac{1}{2}$ in der Fragezahl 2mal enthalten sei, also muß diese das Zweifache von $4\frac{1}{2}$ = 9 sein.

Welche Zahl muß ich $\frac{1}{2}$mal nehmen, um $4\frac{1}{2}$ zu bekommen?

3) a. Was heißt $\frac{1}{2}$ Thaler, Schock rc.?

$\frac{1}{2}$ Thaler heißt einer von den 2 gleichen Theilen, in welche ich den ganzen Thaler zerlegt habe.

b. Wie viel sind 17 Sgr. in halben Thalern?

Da $\frac{1}{2}$ Thaler = $\frac{30}{2}$ Sgr. = 15 Sgr., und 17 Sgr. = 15 + 2 Sgr., so sind 17 Sgr. = $\frac{1}{2}$ Thlr. + 2 Sgr.

c. Um wie viel ist das Achtfache von 17 Sgr. kleiner als das Neunfache von 19 Sgr.?

Das Achtfache von 17 Sgr. = 8 × 17 Sgr. = 8 × $\frac{1}{2}$ Thlr. + 8 × 2 Sgr. = 4 Thlr. 16 Sgr. Das Neunfache von 19 Sgr = 9 × 19 = 9 × $\frac{1}{2}$ Thlr. + 9 × 4 Sgr. = 4$\frac{1}{2}$ Thlr. + 36 Sgr. = 5$\frac{1}{2}$ Thlr. + 6 Sgr. = 5 Thlr. 21 Sgr. 5 Thlr. 21 Sgr. — 4 Thlr. 16 Sgr. = 1 Thlr. 5 Sgr. Also ist ꝛc.

d. In einer Wirthschaft wurden zu einem Gastmahle gekauft 17$\frac{1}{2}$ Pfd., ferner 13$\frac{1}{2}$ Pfd. + 8$\frac{1}{2}$ Pfd. Fleisch. Wie viel Portionen konnten daraus gemacht werden, wenn auf 1 Portion 25 Neuloth gerechnet wurden?

e. Wenn man für 1 Kilogramm $\frac{1}{2}$ Thlr. bezahlt, so bekommt man für 7$\frac{1}{2}$ Sgr. wie viel Pfund?

Da 7$\frac{1}{2}$ Sgr. = $\frac{1}{2}$ × 15 Sgr. oder $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ Thlr., so bekommt man dafür auch nur die Hälfte von dem, was man für $\frac{1}{2}$ Thlr. bekommt, nämlich die Hälfte eines Kilogramm = 1 Pfd.

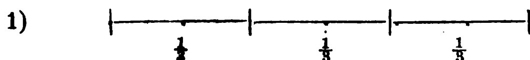
f. Was kosten 10$\frac{1}{2}$ Meter Tuch, wenn man 5 Meter mit 6 Thalern bezahlt?

Kosten 5 Meter 6 Thaler, so kostet 1 Meter den 5ten Theil von 6 Thalern = 1 Thlr. 6 Sgr.; $\frac{1}{2}$ Meter kostet $\frac{1}{2}$ × 1 Thlr. 6 Sgr. = 18 Sgr., also 10$\frac{1}{2}$ Meter = $\frac{21}{2}$ Meter 21 × 18 Sgr. = 21 × $\frac{1}{2}$ Thlr. + 21 × 3 Sgr. = 10$\frac{1}{2}$ Thlr. + 63 Sgr. = 10$\frac{1}{2}$ Thlr. + 2 Thlr. 3 Sgr. = 12 Thlr. 18 Sgr.

Zweite Stufe.

Die Drittel.

1

1) 

Wenn ich 1 in 3 gleiche Theile theile, so bekomme ich $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ ist einer von den 3 gleichen Theilen, in welche ich 1 getheilt habe.

$\frac{2}{3}$ sind 2 von den 3 gleichen Theilen, in die ich 1 getheilt habe.

3 : 1 = $\frac{1}{3}$, oder: $\frac{1}{3}$ × 1 = $\frac{1}{3}$.

a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

b. $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

c. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

d. $\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 2$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} = 1$.

α. $3 : 1 = \frac{1}{3}$, $3 : 2 = \frac{2}{3}$, $3 : 10 = \frac{10}{3}$ ꝛc.

aa. $2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$, $8 + 4\frac{1}{3} = 12\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3} = 9\frac{2}{3}$, $17\frac{2}{3} + 17\frac{1}{3} = 35$, $17\frac{2}{3} + 17\frac{2}{3} = 35\frac{1}{3}$ ꝛc.

bb. $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$, $14 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ ꝛc.

$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $9 \times \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$, $14 \times \frac{2}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$, $10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ ꝛc.

$3 \times 1\frac{1}{3} = 4$ (oder $3 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3}$, oder $3 \times 1\frac{1}{3} = 3 \times \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$), $9 \times 1\frac{1}{3} = 12$ ꝛc.

$3 \times 1\frac{2}{3} = 5$, $5 \times 1\frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}$ ꝛc.

Ist $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$, so ist $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3} \times 1$ (der dritte Theil von 1 zweimal genommen) $= \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \times 9 = \frac{18}{3} = 6$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$ ꝛc.

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ ꝛc.

$2 - 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ꝛc.

$7\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$ ꝛc.

$7\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ $(7 - 4\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}$, oder $(7\frac{1}{3} - 4) - \frac{2}{3}$).

dd. $\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : 2 = 2 \times 3 = 6$, $\frac{1}{3} : 3 = 3 \times 3 = 9$ ꝛc.

$\frac{1}{3} : 14 = 42$ ($\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : 14 = 14 \times 3$).

$\frac{2}{3} : 1 = \frac{3}{2}$ ($\frac{1}{3} : 1 = 3$mal, $\frac{2}{3}$ in 1 die Hälfte von $3 = \frac{3}{2}$mal)

$\frac{2}{3} : 6 = 9$ ($\frac{1}{3} : 6 = 18$, $\frac{2}{3} : 6 = \frac{18}{2} = 9$) ꝛc. Oder:

$\frac{2}{3} : 1 = \frac{2}{3} : \frac{3}{3} = 2 : 3 = \frac{3}{2}$ ꝛc.

$2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3} = 2$ ($\frac{7}{3} : \frac{14}{3} = 7 : 14 = 2$).

$6\frac{2}{3} : 20 = \frac{20}{3} : \frac{60}{3} = 20 : 60 = 3$ ꝛc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{3}$ mit 1!

$\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$, $1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$.

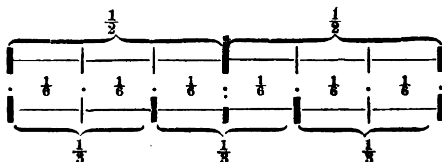
$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 1$, $1 = 3 \times \frac{1}{3}$.

Vergleiche $\frac{2}{3}$ mit 1!

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$, $1 = 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

b. Vergleiche $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{2}$!



Drittel und Halbe kommen zusammen in Sechsteln.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ (2mal der 3te Theil von $\frac{1}{2}$), denn $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{6}$ stecken in $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{6}$ $(= 3 : 2)$ nur $\frac{2}{3}$mal.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$ (3mal die Hälfte von $\frac{1}{3}$), denn $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} =$ $: 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$!

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, denn $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 4 : 3 = \frac{3}{4}$ *).

*) Der Lehrer vergesse nicht, daß hier Kopfrechnen Statt findet. — räumliche Anschauung dieser Verhältnisse hebt alle scheinbare Schwierigkeit.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$, denn $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 3 : 4 = \frac{4}{3}$.

c. Vergleicht 3 und 2!

Die Schüler werden sprechen: 3 ist um 1 größer als 2. Daran anknüpfend, fragt der Lehrer: Welcher Theil ist die Eins (um welche 3 größer ist als 2) von der Zwei? Antw.: Die Hälfte. Folglich ist 3 um die Hälfte größer als 2.

Wer eine 3 Meter lange Schnur hat, der hat eine um die Hälfte längere Schnur, als der Besitzer einer 2 Meter langen Schnur.

Wer 3 hundert, tausend 2c. Thaler hat, der hat um $\frac{1}{2}$ oder um die Hälfte mehr als der, welcher nur 2 hundert, tausend 2c. Thaler besitzt.

Drei ist also um die Hälfte größer als Zwei.

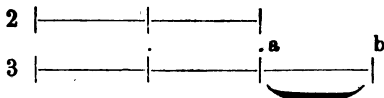
Nun wollen wir sehen, um welchen Theil von der 3 Zwei kleiner ist als Drei. 2 ist um 1 kleiner als 3. 1 ist der 3te Theil von 3. 2 ist also um $\frac{1}{3}$ kleiner als 3.

Wenn August eine 2 Meter lange Schnur und Peter eine 3 Meter lange Schnur hat, so ist die Schnur von A. um $\frac{1}{3}$ kürzer als die Schnur von P.

Wer 200 Thlr. besitzt, hat $\frac{1}{3}$ weniger als der, welcher 300 Thlr. besitzt.

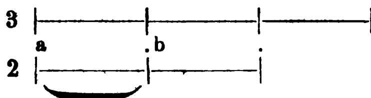
Zwei ist um ein drittelmal kleiner als Drei.

Wir wollen das zeichnen!



Der erste Strich bedeutet $2 \times 1 = 2$, der zweite $3 \times 1 = 3$. Der Theil, um welchen 3 größer ist als 2, soll a b heißen. $ab = \frac{1}{2} \times 2$. Da aber $3 = 3 \times ab$, so ist sie 3 mal $\frac{1}{2}$ von $2 = \frac{3}{2} \times 2$. Das heißt: Die Drei hat 3 solcher Theile, wie deren die Zwei nur zwei hat.

In welchem Theilverhältniß steht aber 2 zur 3?



Da Zwei nur 2 solcher Theile hat, Drei deren 3, a b, der eine Theil von 2, aber ein Drittel von 3 ist: so hat Zwei 2 mal ein Drittel von Drei, oder $2 = \frac{2}{3} \times 3$.

Wie verhalten sich Thaler und Gulden?

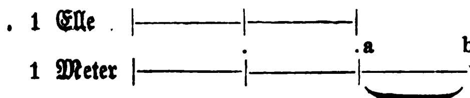
Da 1 Thaler = 3×10, ein Gulden = 2×10 Sgr. ist, so verhalten sie sich wie 3 zu 2.

In welchem Theilverhältniß stehen sie?

Der Thaler ist $\frac{3}{2}$ (3 mal der 2te Theil) von 1 Gulden, und der Gulden $\frac{2}{3}$ mal 1 Thaler oder 2 mal der dritte Theil von 1 Thaler.

In welchem Verhältniß steht die Berliner Elle zum Meter? wenn 1 Berliner Elle nahezu $\frac{2}{3}$ Meter ist?

Antw.: Wie der Gulden zum Thaler oder wie 2 zu 3. Denn: Wenn 1 Elle = $\frac{2}{3}$ Meter ist, so hat die Elle nur 2 Theile, wie deren das Meter drei hat.



Der Theil (ab), den das Meter mehr hat, als die Elle, ist $\frac{1}{2}$ einer Elle, folglich hat das Meter $\frac{3}{2} \times 1$ Elle.

Folglich sind 2, 3, 4, 5 2c. Meter = $\frac{3}{2} \times$ 2, 3, 4, 5 2c. Ellen.

Da 1 Elle = $\frac{2}{3}$ Meter, so sind 2, 3, 4, 5 2c. Ellen = $2 \times \frac{2}{3}$, $3 \times \frac{2}{3}$, $4 \times \frac{2}{3}$, $5 \times \frac{2}{3}$ Meter.

d. Wie oft muß ich den Unterschied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ setzen, um 1, 2. 3... zu bekommen?

Wie oft steckt der Unterschied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$?

Wie oft muß ich $\frac{2}{3}$ zu sich selber zählen, um die Zahl 8 zu erhalten?

Das Achtfache von $\frac{1}{2}$ ist wie viel mehr als das Achtfache von $\frac{1}{3}$, und wie viel weniger als das Achtfache von $\frac{2}{3}$?

3) Was heißt $\frac{2}{3}$ Centner?

$\frac{2}{3}$ Ctr. sind 2 von den 3 gleichen Theilen, in welche ich 1 Ctr. getheilt habe.

Wie viel Pfund hat $\frac{2}{3}$ Ctr. mehr als $\frac{1}{2}$ Ctr.?

$\frac{1}{3}$ Ctr. = $33\frac{1}{3}$ Pfd., $\frac{2}{3}$ Ctr. = $66\frac{2}{3}$ Pfd., $\frac{1}{2}$ Ctr. = 55 Pfd.; $66\frac{2}{3}$ Pfd. — 55 Pfd. = $11\frac{2}{3}$ Pfd.

Wie viel Kilogramm hat $\frac{2}{3}$ Ctr. mehr als $\frac{1}{2}$ Ctr.?

Wie viel beträgt der Unterschied von $\frac{1}{2}$ Pfund und $\frac{2}{3}$ Pfund in Neuloth?

Was kosten $\frac{2}{3}$ Pfund, wenn man das Kilogramm mit 1 Gulden bezahlt?

1 Kilogr = 2 Pfund. Kosten 2 Pfd. 1 Gulden, so kostet 1 Pfd. 10 Sgr., $\frac{1}{3}$ Pfd. $\frac{10}{3}$ = $3\frac{1}{3}$ Sgr.; $\frac{2}{3}$ Pfd. = $2 \times 3\frac{1}{3}$ = 7 Sgr.

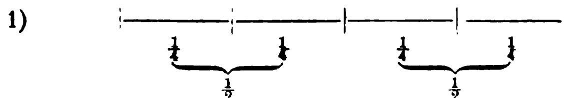
Wie viel Packete können aus $7\frac{1}{2}$ Kilogramm Thee gemacht werden, wenn auf jedes $\frac{1}{2}$ Pfund; wie viel aber, wenn auf jedes $\frac{1}{3}$ Pfund genommen wird?

$7\frac{1}{2}$ Kil. = 15 Pfund. Da 15 Pfd. = $\frac{30}{2}$ Pfd., so können 2c. Da 15 Pfd. = $\frac{45}{3}$ Pfd., so können 45 Packete zu $\frac{1}{3}$ Pfd. davon gemacht werden.

Dritte Stufe.

Die Viertel.

1)



Wenn ich 1 in 4 gleiche Theile theile ꝛc.

$4 : 1 = \frac{1}{4}$. Oder $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$.

a. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = \frac{2}{2} = 1$.

b. $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

c. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

d. $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 1$, $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 2$, $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 3$, $\frac{1}{4} : 1 = 4$.

α. $4 : 1 = \frac{1}{4}$, $4 : 2 = \frac{2}{4}$, $4 : 3 = \frac{3}{4}$ ꝛc.

$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{4} \times 100 = \frac{100}{4}$ ꝛc.

aa. $4\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 4 + \frac{4}{4} = 4 + 1 = 5$.

$4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} = 8\frac{3}{4}$ ꝛc.

bb. $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ ꝛc.

$9 \times 1\frac{1}{4} = 9 + \frac{9}{4} = 9 + 2 + \frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$ ꝛc.

$9 \times 3\frac{3}{4} = 27 + \frac{27}{4} = 27 + 6\frac{3}{4} = 33\frac{3}{4}$ ꝛc.

$\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$, $\frac{3}{4} \times 9 = \frac{27}{4}$, $\frac{3}{4} \times 16 = \frac{48}{4} = 12$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $16 - \frac{1}{4} = 15\frac{3}{4}$ ꝛc.

$20 - \frac{3}{4} = 19\frac{1}{4}$, $20\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 20\frac{1}{4}$,

$20 - 6\frac{3}{4} = 13\frac{1}{4}$, $20\frac{3}{4} - 6\frac{1}{2} = 14\frac{1}{4}$ ꝛc.

dd. $\frac{1}{4} : 1 = 4$, also $\frac{1}{4}$ in 8×1 oder $8 = 8 \times 4 = 32$, $\frac{1}{4} : 32 = 4 \times 32 = 128$. Oder:

$\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{4} : \frac{20}{4} = 1 : 20 = 20$.

$\frac{1}{4} : 5\frac{3}{4} = \frac{1}{4} : \frac{23}{4} = 1 : 23 = 23$.

$6\frac{1}{4} : 25 = 4$ ($6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, $25 = \frac{100}{4}$).

$6\frac{3}{4} : 27 \times 4$ ($\frac{1}{4} : 1 = 4$, $\frac{27}{4} : 27 = 27$).

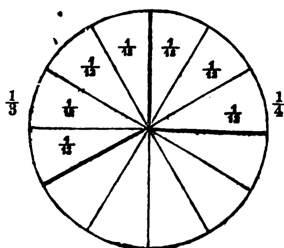
$\frac{3}{4} : 1 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ($\frac{3}{4} : \frac{4}{4} = 3 : 4$).

$\frac{3}{4}$: 2, 3, 5, 6 ꝛc.

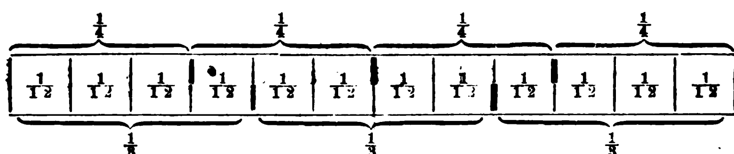
2) a. Vergleiche $\frac{1}{4}$ mit $\frac{1}{3}$! *)

---

*) Kann auch zweckmäßig im Kreise veranschaulicht werden, und zwar



so, daß man den Kreis erst in zwei gleiche Hälften theilt, und diese wieder in zwei gleiche Theile, also das Ganze in $\frac{1}{4}$. Ein zweiter gleich großer Kreis da-



Viertel und Drittel kommen zusammen in Zwölfteln.

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.
$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.
$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$, denn $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $(\frac{4}{12} : \frac{3}{12})$.
$\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}$, denn $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $(\frac{3}{12} : \frac{4}{12})$.

Vergleiche $\frac{1}{4}$ mit $\frac{2}{3}$!

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.
$\frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}$
$\frac{1}{4} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3}$ (der 8te Theil von $\frac{2}{3}$ 3 mal genommen), denn $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ steckt mit seinem 8ten Theile 3mal in $\frac{1}{4}$ $(\frac{8}{12} : \frac{3}{12})$.
$\frac{2}{3} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4}$, denn $\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ $(\frac{3}{12} : \frac{8}{12})$.

Vergleiche $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$!

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.
$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$.
$\frac{3}{4} = \frac{9}{8} \times \frac{2}{3}$ (weil $9 \times \frac{1}{12}$), denn $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ oder $1\frac{1}{8}$.
$\frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$ (weil $8 \times \frac{1}{12}$), denn $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ $(\frac{9}{12} : \frac{8}{12})$.

b. Worin kommen Halbe, Drittel und Viertel zusammen?

Da die Halben und Viertel in Vierteln, Viertel und Drittel aber in Zwölfteln zusammenkommen, so kommen auch Halbe, Drittel und Viertel in Zwölfteln zusammen.

$1 = \frac{12}{12}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{12} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{12} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{12} = \frac{3}{12}$.

c. Wie $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$, so auch die Vielfachen:

2 ×) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
3 ×) $\frac{3}{4} : 1 = \frac{4}{3}$ — d. h. a hat 4 Theile,
4 ×) $1 : 1\frac{1}{3}$ $(\frac{3}{3} : \frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$ — wie deren b 3 hat.
5 ×) $1\frac{1}{4} : 1\frac{2}{3}$ $(\frac{15}{12} : \frac{20}{12}) = \frac{4}{3}$ — $(15 = 3 \times 5, 20 = 4 \times 5)$
2c.

---

neben gestellt, wird in 3 gleiche Theile getheilt, dann jeder derselben in 4. Dann mögen die Halben durch eine starke Linie, die Viertel durch punktirte Linien kenntlich gemacht werden. Aehnlich verfährt man auf den folgenden Stufen. Herr Pfarrer Hauff in seiner schätzenswerthen Rezension (Südd. Schulbote 1852. Nr. 21) legt nicht mit Unrecht großes Gewicht auf Darstellung der Brüche im Kreise, nur wäre zu wünschen, daß dann jeder Schüler selbst sich die Figur anfertigt; doch es müßte zu diesem Zweck ein Reißzeug gebraucht werden, was für Elementarklassen und zahlreiche Schüler seine besondere Schwierigkeit haben möchte. Der Lehrer kann aber jedenfalls an die Wandtafel zeichnen, und mag außer dem Kreise auch des Quadrats und Rechtecks sich bedienen. Mit einfachen Strichen macht sich die Sache am leichtesten, obwohl auch dabei ein Cirkel in der Hand des Schülers sein sollte.

Wie verhalten sich die Zahlen 3 und 4?

3 hat 3×1, $4 = 4 \times 1$. Da $1 = \frac{1}{4} \times 4$, so hat 3 nur $\frac{3}{4} \times 4$. Da $1 = \frac{1}{3} \times 3$, so hat 4 $\frac{1}{3} \times 3$. Oder 4 ist $\frac{1}{3}$ mal größer als 3, und 3 ist $\frac{1}{4}$ mal kleiner als 4.

Zeige dasselbe Verhältniß an dem 3=, 6=, 9=, 10fachen von 3 und 4!

Das 3fache von $3 = 9$, das 3fache von $4 = 12$. Da 9 nur 3 solcher Theile hat, wie deren 12 4 hat, so ist $9 = \frac{3}{4} \times 12$, und da die 3, um welche 12 größer ist als 9, $\frac{1}{3}$ von 9 ist, so hat 12 $\frac{1}{3} \times 9$ (4 mal den 3ten Theil von 9).

d. Zwei Zahlen geben die Summe $16\frac{5}{12}$; die eine heißt $6\frac{2}{3}$, wie die andere?

$16\frac{5}{12} - 6\frac{2}{3} = 16 - 6\frac{2}{3} + \frac{5}{12}$. $16 - 6 = 10$, $10 - \frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}$, $9\frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 9\frac{9}{12} = 9\frac{3}{4}$.

Von $16\frac{5}{12}$ und einer unbekannten Zahl ist der Unterschied $9\frac{3}{4}$, wie heißt die Fragezahl?

$16\frac{5}{12} - 9\frac{3}{4} = 16 - 9\frac{3}{4} + \frac{5}{12}$.

Setze $16\frac{5}{12}$ als die kleinere von beiden, und den Unterschied ebenfalls $9\frac{3}{4}$, wie heißt nun die andere Zahl?

$16\frac{5}{12} + 9\frac{3}{4} = 16\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$ ꝛc.

e. 1 Centner verhält sich zu $\frac{3}{4}$ Ctr., wie welche ganze Zahlen?

Wie 100 zu 75 oder wie 4 zu 3.

Wie oft muß ich $\frac{3}{4}$ Ctr. nehmen, um 1 Ctr. zu erhalten?

Da 1 Ctr. zu $\frac{3}{4}$ Ctr. sich verhält wie 4 zu 3, so muß ich 4 mal den 3ten Theil oder $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$ Ctr. nehmen, um 1 Ctr. zu bekommen.

f. Wie oft muß ich $6\frac{1}{4}$ nehmen, um $8\frac{1}{3}$ zu bekommen?

So oft, als $6\frac{1}{4}$ in $8\frac{1}{3}$ steckt. $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, $8\frac{1}{3} = \frac{25}{8}$, $\frac{25}{4} : \frac{25}{8} = \frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{4}{3}$, also muß ich $6\frac{1}{4}$ $\frac{4}{3}$ mal (den 3ten Theil 4 mal) nehmen, um $8\frac{1}{3}$ zu bekommen.

Thue das!

Wie oft muß ich $8\frac{1}{3}$ nehmen, um $6\frac{1}{4}$ zu bekommen?

So oft, als $8\frac{1}{8}$ in $6\frac{1}{4}$ enthalten ist; $8\frac{1}{3} = \frac{25}{8}$, $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$; $\frac{25}{8} : \frac{25}{4} = \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; also ꝛc.

Das Drittel von $6\frac{1}{4}$ ist das Viertel welcher Zahl?

Das Viertel von $8\frac{1}{3}$ ist welcher Theil von $6\frac{1}{4}$?

g. Wenn ich von einer Zahl 12 wegnehme, behalte ich $\frac{1}{4}$ derselben übrig. Wie ist diese Zahl?

Behalte ich von einer Zahl $\frac{1}{4}$ übrig, so habe ich $\frac{3}{4}$ derselben weggenommen. Da ich 12 weggenommen habe, so ist 12 $\frac{3}{4}$ von der unbekannten Zahl, also $\frac{1}{4} = \frac{12}{3} = 4$, die ganze Zahl aber $4 \times 4 = 16$.

Wie verhält sich das Weggenommene zu der ganzen Zahl?

Wie der Rest zu dem Subtrahendus? ꝛc.

3) a. Was heißt $\frac{3}{4}$ Ctr., und wie viel Pfund sind $\frac{3}{4}$ Ctr.?

$\frac{3}{4}$ Ctr. heißt der 4te Theil von 1 Ctr. 3 mal genommen. Da 1 Ctr. = 100 Pfd., so ist $\frac{1}{4}$ Ctr. $= \frac{100}{4}$ Pfd. = 25 Pfd., $\frac{3}{4}$ Ctr. = 3×25 Pfd. = 75 Pfd.

Wie viel Neuloth sind $\frac{3}{4}$ Pfund?

Wie viel Mandel sind $\frac{3}{4}$ Schock?

b. Wie viel sind $\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{4}$ Thlr. mehr als $\frac{3}{4}$ Thlr.?

$\frac{1}{2}$ Thlr. = 15 Sgr., $\frac{1}{3}$ Thlr. = 10 Sgr., $\frac{1}{4}$ Thlr. = $7\frac{1}{2}$ Sgr., 15 Sgr. + 10 Sgr. + $7\frac{1}{2}$ Sgr. = $32\frac{1}{2}$ Sgr. = 1 Thlr. $2\frac{1}{2}$ Sgr. = $1\frac{1}{12}$ Thl

Oder: $\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ Thlr. + $\frac{1}{4}$ Thlr. = $\frac{6}{12}$ + $\frac{4}{12}$ + $\frac{3}{12}$ Thlr. = $\frac{13}{12}$ = $1\frac{1}{12}$ Thlr. — $\frac{3}{4}$ Thlr. = $\frac{13}{12}$ — $\frac{9}{12}$ Thlr. = $\frac{4}{12}$ Thlr. = $\frac{1}{3}$ Thlr. = 10 Sgr. Also sind $\frac{1}{2}$ Thlr. und $\frac{1}{3}$ Thlr. und $\frac{1}{4}$ Thlr. zusammengenommen um $\frac{1}{3}$ Thlr. oder 10 Sgr. mehr als $\frac{3}{4}$ Thlr.

c. Drücke 23 Sgr. in Viertel-Thalern aus!

23 Sgr. = $22\frac{1}{2}$ Sgr. + $\frac{1}{2}$ Sgr. = $\frac{3}{4}$ Thlr. + $\frac{1}{2}$ Sgr.

Wie viel beträgt das Achtfache von 23 Sgr.?

8 × 23 Sgr. = 8 × $\frac{3}{4}$ Thlr. + 8 × $\frac{1}{2}$ Sgr. = 6 Thlr. 4 Sgr.

Wie viel beträgt das Achtfache von 75 Pfd.?

8 × 75 Pfd. = 8 × $\frac{3}{4}$ Ctr. = 6 Ctr.

d. N. unternahm eine Reise, für die er 100 Thlr. bestimmte, und auf 1 Tag $1\frac{1}{4}$ Thlr. rechnete. Wie lange gedachte er zu reisen?

So viel Tage, als er $1\frac{1}{4}$ Thlr. von 100 Thlrn. wegnehmen konnte, oder als $1\frac{1}{4}$ Thlr. in 100 Thlrn. stecken. $1\frac{1}{4}$ Thlr. = $\frac{5}{4}$ Thlr. $\frac{1}{4}$ Thlr. : 100 Thlr. = 4 × 100 = 400 mal. $\frac{5}{4}$ Thlr. in 100 Thlrn. = $\frac{400}{5}$ = 80mal. Also ꝛc.

Setze das Reisegeld für 1 Tag als unbekannt, und die ganze Summe und die ganze Reisezeit als bekannt.

N. war $2\frac{2}{3}$ Monat verreist gewesen, und hatte 100 Thlr. zu dieser Reise gebraucht. Wie viel beträgt das auf 1 Tag?

Das ganze Reisegeld sei zu suchen:

N. war $2\frac{2}{3}$ Monat verreist gewesen, und hatte den Tag im Durchschnitt $1\frac{1}{4}$ Thlr. verzehrt. Wie viel betrugen die Reisekosten?

e. A. und B. schießen zur Unterstützung einer armen Familie Geld zusammen. A. giebt noch 36 Thlr. mehr als B., welcher nur $\frac{3}{4}$ der Summe des A. giebt. Wie groß war die ganze Summe, mit welcher sie die Familie unterstützten?

Beurtheilung.

Vergleiche die Beiträge von A. und B.

Beitrag von A. = Beitrag von B. + 36 Thlr.

Beitrag von B. = $\frac{3}{4}$ × Beitrag von A.

Wenn B. $\frac{3}{4}$ der Summe des A. beiträgt, so macht die Summe von A. wie viel aus?

Ein Ganzes = $\frac{4}{4}$.

Wie viel Theile gibt demnach A. und wie viel B.?

A. gibt 4 Theile und B. 3 Theile.

Aus wie viel gleichen Theilen ist also die ganze Summe zusammengesetzt?

Aus 4 + 3 = 7 Theilen.

Wie viel von diesen Theilen gibt A. mehr als B.?

A. gibt 1 Theil mehr als B.

Wie nennst du diesen Theil mit Bezug auf das Ganze?

Ein Siebentel.

Wie viel ist das, was A. mehr gibt, im Gelde?

Das Ganze ꝛc. = 36 Thlr.

Wie viel sind diese 36 Thlr. von der ganzen Summe?

Ein Siebentel.

Der Schüler schließt nun selbst.

Ausrechnung.

Da die ganze Summe aus 7 gleichen Theilen besteht, und 1 Theil 36 Thlr. beträgt, so ist die ganze Summe = 7 × 36 Thlr. = 252 Thlr.

a. Wie viel ist der Antheil des A., und wie viel der des B.?

b. A. und B. schossen eine Summe von 252 Thlrn. zusammen, A. gab dazu 144 Thlr.; wie viel von der Summe des A. gab B.?

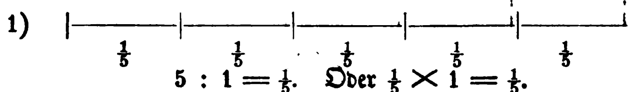
c. B. gab 108 Thlr. zu der Summe von 252 Thlrn. und das war gerade $\frac{3}{4}$ der Summe des A., wie viel gab dieser?

d. A. gab 144 Thlr., B. 36 Thlr. weniger. Das, was A. mehr gab, war $\frac{1}{7}$ der ganzen Summe. Wie viel betrug diese?

Vierte Stufe.

Die Fünftel.

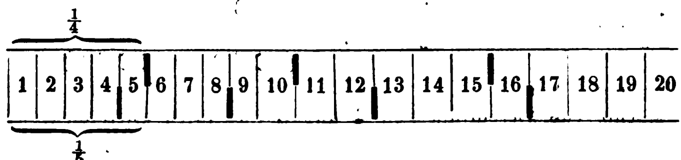
1)



$5 : 1 = \frac{1}{5}$. Oder $\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$.

Wie auf den vorigen Stufen!

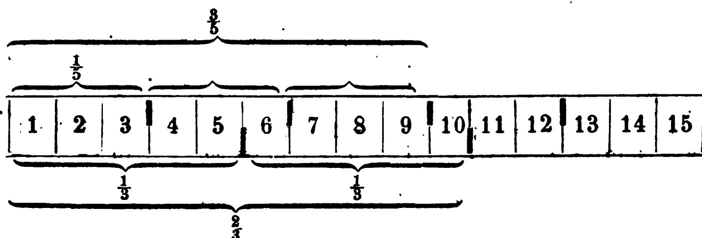
2) a. Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{1}{4}$!



Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ mit $\frac{1}{4}$! $\frac{3}{5}$ mit $\frac{3}{4}$!*)

Wie auf den vorigen Stufen!

b. Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{1}{3}$!



*) Man lasse oft einen Schüler an die Wandtafel treten und durch Zeichnung diese Zahlverhältnisse darstellen. Die Schüler bekommen bald große Fertigkeit in diesem „Zahlenzeichnen", und es macht ihnen viel Vergnügen.

Vergleiche $\frac{3}{5}$ mit $\frac{2}{3}$!

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15},\ \frac{2}{3} = \frac{10}{15},\ \frac{3}{5} = \frac{2}{3} - \frac{1}{15}$$

ꝛc.

Wie auf den vorigen Stufen!

c. Worin kommen Halbe, Drittel, Viertel und Fünftel zusammen? Da Halbe, Drittel und Viertel in Zwölfteln zusammenkommen, so sehe ich zu, worin Fünftel und Zwölftel zusammenkommen. Ich theile das Fünftel in 12, und das Zwölftel in 5 Theile, so wird das Ganze in 60 gleiche Theile zerlegt. Ist $1 = \frac{60}{60}$, so ist $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ ꝛc.

d. Ist $\frac{1}{5} : \frac{1}{4} = \frac{4}{5}$, so ist auch

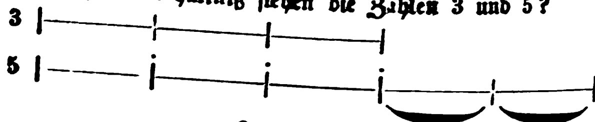
$$6 \times \frac{1}{5} : 6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{5} : 1\frac{2}{4} = \frac{5}{4},$$

$$10 \times \frac{1}{5} : 10 \times \frac{1}{4} = 2 : 2\frac{2}{4} = \frac{5}{4}\ \text{ꝛc.}$$

Ist $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{5}$ $\frac{9}{10}$ mal enthalten, so ist auch

$$3 \times \frac{2}{3} : 3 \times \frac{3}{5} = 2 : 1\frac{4}{5} = \frac{9}{10}\ \text{ꝛc.}$$

d. h. die eine Zahl hat 3 solcher Theile, wie die andere 5 hat. In welchem Verhältniß stehen die Zahlen 3 und 5?



$$3 = 3 \times 1.$$
$$5 = 5 \times 1.$$

Da 1 der fünfte Theil von 5, so ist 3 um $\frac{2}{5} \times 5$ kleiner als 5. Da 1 der dritte Theil von 3, so ist 5 um $\frac{2}{3} \times 3$ größer als 3. Oder: Die 5 hat 5 solcher Theile, wie die 3 deren 3 hat, folglich ist $5 = \frac{5}{3} \times 3$, und $3 = \frac{3}{5} \times 5$.

Dasselbe Verhältniß bei 6 und 10 (2×3 und 2×5), 9 und 15, 12 und 20 ꝛc.

Ebenso das Verhältniß von 4 und 5 und ihren Vielfachen.

Das Dutzend verhält sich zum Mandel wie 4 zu 5. Das Wievielfache vom Mandel ist das Dutzend und das Wievielfache vom Dutzend das Mandel?

1 Dutzend = $\frac{4}{5}$ Mandel, 1 Mandel = $\frac{5}{4}$ Dutzend.

e. Zwei Zahlen, wovon die eine $6\frac{1}{3}$, geben die Summe $18\frac{2}{3}$, wie heißt die andere Zahl?

[illegible] $= 12$, [illegible] $= \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$. $18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{3}$ [illegible] $= 12\frac{1}{3}$, $12\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 12\frac{10}{15} - \frac{3}{15} = 12\frac{7}{15}$ [illegible] $18 - 6\frac{1}{5} = 11\frac{1}{5}$ ꝛc.

f. Wie oft muß ich $3\frac{3}{5}$ nehmen, um 18 zu bekommen?

[illegible] $= 18 : 90 = 5$. Oder: [illegible] $: 1 = 5$, $\frac{1}{5} : 18 = 90$, $\frac{18}{5} : 18 = \frac{90}{18} = 5$. Oder: Wie $\frac{1}{5} : 1 =$ [illegible] $= 5$.

II) a. Wie erhalte ich $\frac{4}{5}$ Ctr.? [illegible], daß ich den 5ten Theil eines Centners 4 mal nehme, oder [illegible] 4 mal nehme.

b. [illegible] den Unterschied von $\frac{1}{2}$ Ctr., $\frac{1}{3}$ Ctr., $\frac{1}{4}$ Ctr. und $\frac{1}{5}$ Ctr. in Pfunden an!

c. Wie viel Sgr. muß ich zu $\frac{2}{3}$ Thlr. thun, um $\frac{4}{5}$ Thlr. zu bekommen?

d. Wie berechnest du das Achtfache von 19 Sgr. in Fünftel-Thalern?

e. $\frac{1}{3}$ Pfd. kostet $\frac{1}{4}$ Thlr., wie viel $\frac{1}{5}$ Pfd.?

Kostet $\frac{1}{3}$ Pfd. $\frac{1}{4}$ Thlr., so kostet 1 Pfd. = $3 \times \frac{1}{3}$ Pfd. $3 \times \frac{1}{4}$ Thlr. = $\frac{3}{4}$ Thlr. $\frac{1}{5}$ Pfd. aber oder $\frac{1}{5} \times 1$ Pfd. kostet $\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ Thlr. = $\frac{3}{20}$ Thlr.

Wie viel sind $\frac{3}{20}$ Thlr. in Sgr.?

Da 1 Thlr. = 30 Sgr., so ist $\frac{1}{20}$ Thlr. = $\frac{1}{20} \times 1$ Thlr. = $\frac{1}{20} \times$ 30 Sgr. = $\frac{30}{20}$ Sgr. = $1\frac{10}{20}$ Sgr. = $1\frac{1}{2}$ Sgr., also $\frac{3}{20}$ Thlr. = $3 \times 1\frac{1}{2}$ Sgr. = $4\frac{1}{2}$ Sgr. = 4 Sgr. 6 Pf.

Für 7 Sgr. 6 Pf. bekommt man $\frac{1}{5}$ Pfd., wie viel für 10 Sgr.?

7 Sgr. 6 Pf. = $\frac{1}{4}$ Thlr., 10 Sgr. = $\frac{1}{3}$ Thlr. Bekommt man für $\frac{1}{4}$ Thlr. $\frac{1}{5}$ Pfd., so bekommt man für 1 Thlr. = $4 \times \frac{1}{4}$ Thlr. $4 \times \frac{1}{5}$ Pfd. = $\frac{4}{5}$ Pfd. Also für $\frac{1}{3}$ Thlr. = $\frac{1}{3} \times 1$ Thlr. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$ Pfd. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$ Pfd. = $\frac{1}{15}$ Pfd., $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$ Pfd. = $\frac{4}{15}$ Pfd.

$\frac{1}{5}$ Pfd. kostet $4\frac{1}{2}$ Sgr., wie viel $\frac{1}{3}$ Pfd.?

$\frac{1}{5}$ Pfd. : $4\frac{1}{2}$ Sgr.

1 Pfd (= $5 \times \frac{1}{5}$ Pfd.) $5 \times 4\frac{1}{2}$ Sgr. = $22\frac{1}{2}$ Sgr. = $\frac{3}{4}$ Thlr.

$\frac{1}{3}$ Pfd. (= $\frac{1}{3} \times 1$ Pfd) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ Thlr. = $\frac{1}{4}$ Thlr. = 7 Sgr. 6 Pf.

f. Jemand verwendet $\frac{2}{3}$ seines Einkommens auf den Lebensunterhalt, $\frac{1}{5}$ des Restes zu seinem Vergnügen, und behält noch 48 Thlr. für die Armen übrig. Wie groß war sein ganzes Einkommen?

a. Verwendet er $\frac{2}{3}$ auf den Lebensunterhalt, so bleiben ihm noch $\frac{1}{3}$ seines Einkommens übrig.

b. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ wird also auf das Vergnügen gewandt.

c. Da vom Lebensunterhalt noch $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ des Einkommens übrig bleiben, so bleibt nach Abzug des $\frac{1}{15}$ noch $\frac{4}{15}$ vom Ganzen übrig.

d. Diese $\frac{4}{15}$ sind gleich den 48 Thlrn.

e. Also $\frac{1}{15} = \frac{48}{4}$ Thlr. = 12 Thlr.

f. Also das ganze Einkommen oder $\frac{15}{15} = 15 \times 12$ Thlr. = 180 Thlr.

α. Wie viel Thaler werden auf den Lebensunterhalt und wie viel auf das Vergnügen gewandt? Wie verhalten sich beide Summen? Wie das Geld für das Vergnügen zum Gelde für die Armen? Welcher Theil vom Ganzen sind die 48 Thaler? ($\frac{4}{15}$).

β. Jemand hatte ein Einkommen von 180 Thlrn. Davon brauchte er $\frac{2}{3}$ zu seinem Lebensunterhalte, und $\frac{1}{15}$ zu seinem Vergnügen. Das Uebrige bestimmte er für die Armen. Wie viel war das?

γ. Jemand hatte ein jährliches Einkommen von 180 Thlrn., wovon er $\frac{2}{3}$ zu seinem Lebensunterhalte brauchte und 48 Thlr. den Armen gab. Wie viel vom Ganzen konnte er auf sein Vergnügen wenden?

Vergleichung der alten und neuen Maaße und Gewichte.

1 Meter ist nahezu $3\frac{1}{5}$ preußische Fuß. Ist 1 Meter = $3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$ preuß. Fuß, so hat es 16 solcher Theile, wie deren der Fuß nur 5 hat. Hat der preuß. Fuß nur 5 Theile, wie sie das Meter 16 hat, so ist er $\frac{5}{16}$ Meter.

Wie viel Meter sind demnach 2, 3, 4, 20, 25 preuß. Fuß?

Wie viel preuß. Fuß sind 2, 3, 5 rc. Meter?

1 Berliner Elle (= $2\frac{1}{8}$ preuß. Fuß) hat nahezu $\frac{2}{3}$ Meter, verhält sich also zum Meter wie 2 zu 3.

1 Zoll = $2\frac{3}{5}$ Neuzoll. Wie verhält sich also der alte und neue Zoll?

Ist der alte Zoll = $2\frac{3}{5}$ = $\frac{13}{5}$ Neuzoll, so hat er 13 solcher Theile, wie deren der Neuzoll 5 hat. Da ein solcher Theil = $\frac{1}{5}$ Neuzoll ist, so hat der ganze Neuzoll ($\frac{5}{5}$) $\frac{5}{13}$ vom alten Zoll.

1 Neuzoll = $\frac{5}{13}$ Altzoll,
1 Altzoll = $\frac{13}{5}$ Neuzoll.

Das Verhältniß beider wird durch die Zahlen 5 und 13 ausgedrückt.

Ein Zollstab, auf der einen Seite mit alten, auf der andern mit neuen Z. wird vorgezeigt!

30 alte Loth sind 50 Neuloth. Folglich hat 1 altes Loth den 30sten Theil von 50 Neuloth = $\frac{50}{30}$ = $1\frac{2}{3}$ Loth.

1 altes Loth = $\frac{5}{3}$ Neuloth

heißt, das alte Loth hat 5 solcher Theile, wie deren das Neuloth nur 3 hat. Da ein solcher Theil $\frac{1}{5}$ des alten Lothes ist, so ist 1 Neuloth = $\frac{3}{5} \times 1$ altes Loth. Wie sich die Ganzen verhalten, so ihre Theile. Theilt man das alte Loth in 10 Quentchen, das Neuloth in 10 Gramm, so muß sich auch 1 Quentchen zum Gramm verhalten, wie das Altloth zum Neuloth. Da 1 Neuloth = $\frac{3}{5}$ vom Altloth ist, so ist auch 1 Gramm $\frac{3}{5}$ vom Quentchen und da 1 Altloth = $\frac{5}{3}$ Neuloth, so ist auch 1 Quentchen = $\frac{5}{3}$ Gramm.

5 Quentchen sind also $5 \times \frac{5}{3}$ Gramm = $\frac{25}{3}$ Gramm = $8\frac{1}{3}$ Gramm.

5 Gramm = $5 \times \frac{3}{5}$ Quentchen = $\frac{15}{5}$ = 3 Quentchen.

1 Wispel hat $13\frac{1}{5}$ Hektoliter.*)

Hat 1 Wispel $\frac{66}{5}$ Hektoliter, so hat er 66 solcher Theile, wie deren der Hektoliter nur 5 hat. Ein Fünftel des Hektoliters ist also $\frac{1}{66}$ des Wispels, folglich ein ganzer Hektoliter = $\frac{5}{66}$ Wispel.

Wie viel Wispel aber beträgt 1 Neuscheffel, wenn etwa $26\frac{2}{5}$ **) Neuscheffel = 1 Wispel sind?

Ist 1 Wispel = $26\frac{2}{5}$ = $\frac{132}{5}$ Neuscheffel, so hat er 132 solcher Theile, wie deren der Neuscheffel nur 5 hat. Da 1 solcher = $\frac{1}{5}$ Neuscheffel, so ist 1 ganzer Neuscheffel 5 mal der 132ste Theil des Wispels = $\frac{5}{132} \times 1$ Wispel.

Wie viel Wispel sind 8, 20, 40 Neuscheffel?

Da 1 Neuscheffel = $\frac{5}{132} \times 1$ Wispel, so sind 8 Neuscheffel = $\frac{5}{132} \times$ 8 Wispel = $8 \times \frac{5}{132}$ Wispel = $\frac{40}{132}$ = $\frac{20}{66}$ = $\frac{10}{33}$ Wispel.

Auch das Verhältniß vom Altscheffel und Neuscheffel kann hier mitgetheilt werden.

1 Altscheffel = $1\frac{1}{10}$ Neuscheffel.

Der Altscheffel hat also $\frac{11}{10}$ vom Neuscheffel ($\frac{10}{10}$), und $\frac{1}{10}$ Neuscheffel ist nur der 11te Theil ($\frac{1}{11}$) vom Altscheffel. Folglich $\frac{10}{10}$ oder der ganze Neuscheffel = $\frac{10}{11}$ Altscheffel.

Wie viel Altscheffel sind 2, 5, 9 2c. Neuscheffel?

Wie viel Neuscheffel sind 5 Altscheffel?

1 Altscheffel = $1\frac{1}{10}$ Neuscheffel.
5 Altscheffel = $5 \times 1\frac{1}{10}$ = $5\frac{1}{2}$ Neuscheffel.

---

*) Genauer $13\frac{4}{21}$. Bei kleineren Rechnungen kann man sich mit dem bequemeren Bruch behelfen.

**) Genauer $26\frac{8}{21}$.

Der Schneidermeister N. forderte bis jetzt zur Anfertigung eines neuen Rockes $3\frac{1}{4}$ Ellen und für eine Hose $1\frac{3}{4}$ Ellen Tuch. Wie viel muß er von dem nun in Metern nehmen?*)

Da 1 Elle = $\frac{2}{3}$ Meter, so sind $3\frac{1}{4}$ Ellen = $3\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ Meter. 3 mal $\frac{2}{3}$ Meter = $\frac{6}{3}$ = 2 Meter. $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ Meter = $\frac{2}{12}$ = $\frac{1}{6}$ Meter. Folglich mußte der Schneidermeister zum Rocke $2\frac{1}{6}$ Meter fordern, ꝛc.

Was kosten 3 Meter 75 Centimeter Tuch zu einem neuen Anzuge, wenn das Meter mit 2 Thlrn. 20 Sgr. bezahlt wird?

3 Meter 75 Centimeter = $3\frac{3}{4}$ Meter. Kostet 1 Meter 2 Thlr. 20 Sgr., so kosten 3 Meter 3×2 Thlr. 20 Sgr. ($2\frac{2}{3}$ Thlr.) = 8 Thaler. $\frac{1}{4}$ Meter kostet den vierten Theil von 2 Thlrn. 20 Sgr., $\frac{3}{4}$ Meter also 60 Sgr. = 2 Thlr. Das ganze Tuch kostet also = 8 + 2 = 10 Thaler.

Ein Zimmermann erhielt bis jetzt für den laufenden Fuß Holz zu zimmern $10\frac{1}{2}$ Pfennig. Wie viel wird er für das laufende Meter berechnen müssen?

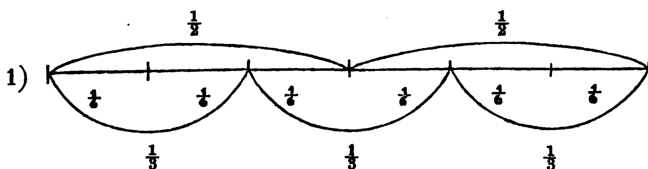
Da 1 Meter $3\frac{1}{5}$ preußische Fuß, so wird der Preis auch $3\frac{1}{5} \times 10\frac{1}{2}$ Pf. betragen. $3 \times 10\frac{1}{2}$ Pf. = $31\frac{1}{2}$. $\frac{1}{5} \times 10\frac{1}{2}$ Pf. = $2\frac{1}{10}$ Pf. Macht zusammen $31\frac{1}{2} + 2\frac{1}{10}$ Pf. = $33\frac{3}{5}$ Pfennig = 2 Sgr. $9\frac{3}{5}$ Pf. Oder: Da der preußische Fuß = $\frac{5}{16}$ Meter, so ist der Lohn für den Fuß = $\frac{5}{16}$ des Lohnes vom Meter. Folglich muß das Meterlohn 16 solcher Theile haben, wie deren das Fußlohn 5 hat. $\frac{1}{5} \times 10\frac{1}{2}$ = $2\frac{1}{10}$ Pf. $16 \times 2\frac{1}{10}$ Pf. = $33\frac{3}{5}$ Pf.

Fünfte Stufe.

Die Sechstel.

1

1)



Wie auf den vorigen Stufen.

(Auch im Kreise und Rechteck zu veranschaulichen.)

a. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

b. $1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ꝛc.

c. $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ꝛc.

d. $\frac{1}{6} : 1 = 6$, $\frac{2}{6} : 1 = 3$, $\frac{3}{6} : 1 = 2$.

ꝛc.

2) a. Da 6 Theile = 2×3 oder 3×2 Theile, so lassen sich Sechstel auch in Dritteln und Halben ausdrücken, wie solches schon früher erkannt ist. Anwendung: Da 8 Theile = 2×4 oder 4×2 Theile, lassen sich Achtel auch auf Viertel oder Halbe zurückführen. Da

*) Aus G. Kentenich: Der Rechenunterricht in der Volksschule (2te Aufl.), worin die Reduktionen gründlich behandelt sind.

12 Theile = ꝛc., so lassen sich Zwölftel auf Drittel, Viertel, Sechstel und Halbe zurückführen.

Warum lassen sich aber $\frac{5}{6}$ nicht in Halben oder Dritteln ausdrücken?

Weil $\frac{5}{6}$ nicht in $\frac{6}{6}$ (im Ganzen) ohne Rest aufgehen.

b. Vergleiche $\frac{1}{6}$ mit $\frac{1}{5}$!
(Geschieht vom Schüler ohne Hülfe.)

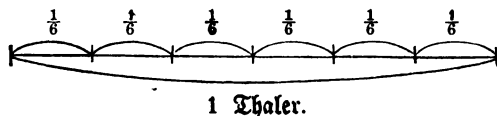
Vergleiche $\frac{1}{6}$ mit $\frac{1}{4}$!
(Löst der Schüler beide in 24stel auf, so merkt er bald, daß es noch einfacher war, sie in Zwölftel aufzulösen.)

c. Worin kommen Halbe, Drittel, Viertel und Sechstel zusammen?
Welches ist der Unterschied von $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$? von $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$?
(Aufgaben sind leicht nach dem Vorhergegangenen zu bilden.)
In welchem Verhältniß steht 5 und 6?
($5 = \frac{5}{6} \times 6$, $6 = \frac{6}{5} \times 5$.)

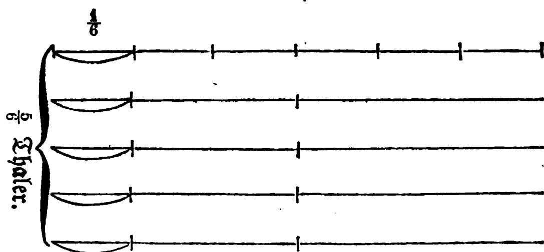
Zeige, daß die Hälfte von 5 und 6 in demselben Verhältniß steht!
(Die Hälfte von $5 = 2\frac{1}{2}$; die Hälfte von $6 = 3$. Da $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $3 = \frac{6}{2}$, so verhalten sie sich wie 5 : 6. Folglich ist auch $2\frac{1}{2} = \frac{5}{6} \times 3$. $\frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.)

3) a. Verwandele 25 Sgr. in einen Thalerbruch!
Da 1 Sgr. = $\frac{1}{30}$ Thlr., sind 25 Sgr. = $\frac{25}{30}$ Thlr. = $\frac{5}{6}$ Thlr.

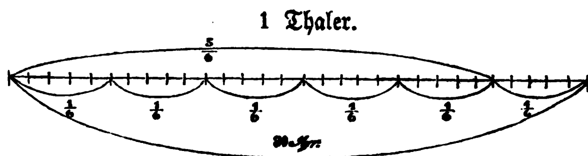
Wie könnte der Bruch $\frac{5}{6}$ Thaler noch entstanden sein?
Wenn ich den 6ten Theil von 5 Thlrn. oder von 1 Thlr. 5 mal nehme.



1 Thaler.



1 Thaler.



1 Sgr.	= $\frac{1}{30}$ Thlr.		9 Sgr.	= $\frac{3}{10}$ Thlr.	
2 „	= $\frac{1}{15}$ „		10 „	= $\frac{1}{3}$ „	
3 „	= $\frac{1}{10}$ „		11 „	= $\frac{11}{30}$ „	
4 „	= $\frac{2}{15}$ „		12 „	= $\frac{2}{5}$ „	
5 „	= $\frac{1}{6}$ „		13 „	= $\frac{13}{30}$ „	
6 „	= $\frac{1}{5}$ „		14 „	= $\frac{7}{15}$ „	
7 „	= $\frac{7}{30}$ „		15 „	= $\frac{1}{2}$ „	
8 „	= $\frac{4}{15}$ „			ꝛc.	

In ähnlicher Weise mit Kreuzern und Gulden, Scheffeln und Wispeln.

b. Wenn man für $\frac{1}{4}$ Thlr. 1 Elle kauft, wie viel erhält man für $\frac{5}{6}$ Thlr.?

Viertel und Sechstel kommen in Zwölfteln zusammen; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Bekommt man für $\frac{3}{12}$ Thlr. 1 Elle, so bekommt man für $\frac{1}{12}$ Thlr. — den dritten Theil = $\frac{1}{3}$ Elle, also für $\frac{10}{12}$ Thlr. 10 mal $\frac{1}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ Elle.

Zwei sparsame Kinder legten von ihrem Taschengelde jeden Monat zurück A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$. Das Taschengeld des A. betrug $\frac{2}{3}$ Gulden, des B. $\frac{3}{5}$ Gulden; wie viel hatte B. am Ende des Jahres mehr zurückgelegt als A.?

A. legte jeden Monat $\frac{2}{15}$ Gulden, B. $\frac{1}{10}$ Gulden zurück; im Jahr = 12 Monate legte also B. $12 \times \frac{1}{10}$ G. $= \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ G. zurück, und A. $12 \times \frac{2}{15} = \frac{24}{15} = 1\frac{9}{15} = 1\frac{3}{5}$ G. Folglich hatte A. $\frac{2}{5}$ G. mehr zurückgelegt als B.

Sechste Stufe.

Siebentel lassen sich weder in Halben, noch in Dritteln, Vierteln ꝛc. ausdrücken, denn weder 2 noch 3 ꝛc. geht in 7 ohne Rest auf. Welche Zahlen gehen in 8, in 9 ohne Rest auf? Was folgt daraus für die Achtel, Neuntel? — Ohne alle Schwierigkeiten vergleichen nun die Schüler Siebentel und Sechstel ꝛc., Siebentel und Achtel, Achtel und Neuntel ꝛc., und lösen entsprechende Aufgaben. Reduktionen wie folgende:

1 Quart hat nahezu $1\frac{1}{7}$ Liter. Folglich hat 1 Quart 8 Theile wie das Liter 7. Das Liter ist also $\frac{7}{8}$ Quart.

Quart und Liter verhalten sich also wie welche ganze Zahlen?

1 Tonne Bier hat $1\frac{1}{7}$ Hektoliter. Wie viel Tonnen demnach 1 Hektoliter?

Antw.: $\frac{7}{8}$ Tonnen.

Anwendung auf die Vielfachen.

Ich meine, daß wir für die Grundlegung an diesen sechs Stufen vollkommen genug haben.

Dies wäre etwa die Arbeit des ersten Halbjahres. Es folgt nun

Vierten Jahres
Zweites Semester.

Die Spezies in Brüchen.

(Regelrechnen.)

Während das Rechnen im ersten Semester ein statarisches war, wird es nun im zweiten Semester ein kursorisches. Nachdem der Schüler dort in seiner allseitigen Anschauung des Bruches auf heuristischem Wege sämmtliche Operationen des Bruchrechnens gewonnen hat, kommt es nun darauf an, den gewonnenen Stoff nach seinen einzelnen Seiten (in specie) zu verarbeiten, die Operation als solche zur Fertigkeit zu bringen. Darum folgt nunmehr die bekannte Eintheilung:

1) Wesen und Behandlungsart des Bruches überhaupt (Erklärung der Theile, Arten &c. des Bruches, Erweitern, Heben, Generalnenner suchen &c.).

2) Resolution,
3) Reduktion,
4) Addition,
5) Subtraktion,
6) Multiplikation,
7) Division,

} in unbenannten und benannten Zahlen — mündlich und schriftlich.

Dieses Speziesrechnen geht aber nun ohne alle Schwierigkeit von Statten, weil die Kraft dafür bereits intensiv gebildet ist.

Ich mache nur noch auf folgende Punkte aufmerksam:

1. Die Einheit.

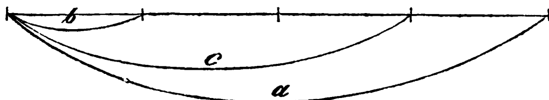
Der Schüler hat bereits oben angeschaut und gesprochen: „Wenn ich die 1 in 4 gleiche Theile zerlege, so heißt einer dieser Theile ein Viertel."

Drei Viertel sind 3 von den 4 gleichen Theilen, in die ich die 1 getheilt habe.

Nun fahre man fort:

Du kannst dir unter der 1 jede beliebige Größe denken, die in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt ist; z. B. eine Elle, einen Centner.

Zeichne mir $\frac{1}{4}$ Elle, $\frac{3}{4}$ Ellen!



Um b zu erhalten, muß man erst was haben?
Was bedeutet a?

Insofern man durch die Theilung eine Vielheit von Theilen ($\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$) gewinnt, nennt man das Ganze die **Einheit**. Der Thaler besteht aus 30 Silbergroschen; diese bilden eine Vielheit von jener Einheit, die ich wie nenne?

Welche Größe heißt Einheit?

Was ist die Einheit?

Welche Größe bildet in unserer Figur die Einheit?

Antw.: Die Elle.

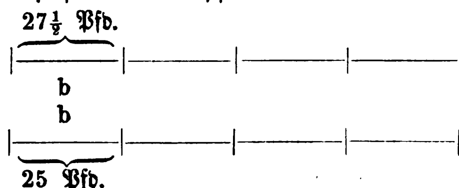
Denken wir uns unter dem a 1 Centner als Einheit, wie viel beträgt da b, c? ($\frac{1}{4}$ Ctr., $\frac{3}{4}$ Ctr.)

Wie viel Pfunde würden auf b, c kommen?

Wenn b = 25 Pfd. gesetzt würde, wie groß müßte da die Einheit sein?

In Preußen war b = $27\frac{1}{2}$ Pfd.

In Oestreich ist b = 25 Pfd.



Wie viel Pfund hat also der preußische Centner, und wie viel der östreichische Centner?

Die Zahl, mit welcher ich die Einheit bezeichne, ist die 1.

Welche Zahlen nennen mir die Theile der Einheit?

Was sind Bruchzahlen?

Wie verhält sich ein ächter Bruch zur Einheit?

Welche Bruchzahl ist eben so groß als die Einheit?

Die, welche mir **alle** Theile nennt, in die ich die Einheit zerlegt habe.

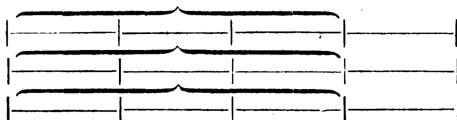
Drücke die Einheit in Dritteln, Vierteln, Tausendsteln aus!

Der Uebergang vom ächten Bruch zum unächten Bruch und zur gemischten Zahl ist leicht.

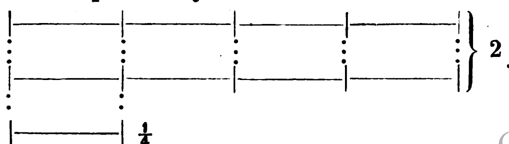
2. Erweitern und Verkürzen.

Wenn du $\frac{3}{4}$ mit 3 multiplizirst, so erhältst du wie viel?

Zeichne das!



Verwandle die $\frac{9}{4}$ in Ganze.



Welche Zahl hast du nur multiplizirt, und welche Zahl des Bruches ist unverändert geblieben?

Wie verhält sich $\frac{3}{4}$ zu $\frac{9}{4}$? ($\frac{9}{4}$ ist das Dreifache von $\frac{3}{4}$.)

Wenn ich den Zähler eines Bruches mit 3, 5, 10 2c. multiplizire, wird der Werth des Bruches? (um 3, 5, 10 mal größer.)

Nun wollen wir den Zähler unverändert lassen, und den Nenner 4 drei mal nehmen. Wie heißt jetzt der Bruch?

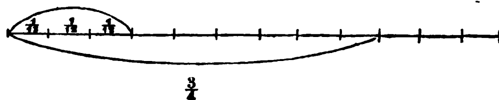
Wie verhält sich der Werth von $\frac{3}{4}$ zu dem von $\frac{3}{12}$?

Jener ist dreimal größer, dieser dreimal geringer.

Wenn ich den Nenner 4 mit 3 multiplizire, so ist das eben so viel, als wenn ich von dem Bruche welchen Theil suche?

Also mit welcher Zahl dividire?

Zeichne das!



$\frac{3}{4}$

Wenn sich 3 in $\frac{3}{4}$ theilen, bekommt jeder $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Was müßte geschehen, wenn aus dem $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ wieder der erste Werth $\frac{3}{4}$ gewonnen werden sollte?

Welchen Einfluß hat es also auf den Werth des Bruches, wenn ich Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizire?

u. s. f.

3. Der Generalnenner.

Das Suchen des gemeinschaftlichen oder Generalnenners wird in den meisten Rechenbüchern sehr mechanisch beigebracht und doch ist es eine Operation, die es verdiente, daß sich der Schüler Etwas dabei denkt und deren Erklärung auch sehr einfach ist.

Den „Generalnenner" suchen heißt aber nicht bloß den „allgemeinen" Nenner suchen, in welchem die verschiedenen gegebenen Nenner ohne Rest aufgehen (dazu bedürfte es bloß des Multiplizirens aller Nennerzahlen), sondern es heißt die kleinste Zahl suchen, in welcher die Nenner sämmtlicher vorhandener Brüche aufgehen. Dieses kleinste Vielfache wird gefunden, wenn man auf die Grundfaktoren derjenigen Zahlen zurückgeht, für die es gefunden werden soll.

Der Schüler weiß bereits, daß Halbe und Drittel in Sechsteln, Drittel und Viertel in Zwölfteln zusammenkommen; er hat die Halben in 3 Theile, die Drittel in 4 Theile getheilt, also die Nenner miteinander multiplizirt. Frage ich nun, worin kommen Viertel und Sechstel zusammen, so wird die Antwort leicht erfolgen „in Vierundzwanzigsteln"! Der Schüler findet bald, daß Viertel und Sechstel in Zwölfteln zusammenkommen. Warum das?

Um 4 = 2 . 2

Was 6 = 3 . 2

Beide Zahlen, 4 und 6, haben einen gleichen Faktor, die 2; mit diesem kann ich die 6 ohne Rest theilen, denn die 6 ist ein Vielfaches der 2. Mit 2 . 2 geht das aber nicht, das geschieht erst dann, wenn ich die 6 mit diesem andern Faktor 2 multiplizire, 2×6 oder $2 . 3 . 2 = 12$, und 12 ist ein Vielfaches der 4 sowohl (3×4 oder $3 . 2 . 2$) als der 6 (2×6 oder $2 . 3 . 2$).

$$15 = 5 . 3$$
$$18 = 6 . 3 = 2 . 3 . 3$$
$$9 = 3 . 3$$

Durch den Faktor 3 sind die Zahlen 15, 18 und 9 mit einander verwandt. Da der Faktor 3 von der 15 bereits in der 18 enthalten, so finde ich das kleinste Vielfache von 15 und 18 als $5 . 6 . 3 = 90$. Da ferner die $9 = 3 . 3$ ist, diese Faktoren aber schon in der 18 ($2 . 3 . 3$) enthalten sind, so ist 18 selbst das kleinste Vielfache von 18 und 9, mithin braucht für 9 kein anderes Vielfache als das von 15 und 18 gesucht zu werden, also kommen 15tel, 18tel, 9tel in 90steln zusammen.

Die Zahlen 30 und 42 sind verwandt durch den Faktor 6, und da $6 = 2 . 3$, auch durch die Faktoren 2 und 3.

$$30 = \not{2} . \not{3} . 5$$
$$42 = 2 . 3 . 7.$$

Da die Faktoren 2 . 3 schon in der 42 stecken, brauche ich bloß $5 . 2 . 3 . 7 = 5 . 42 = 210$ zu nehmen, um das kleinste Vielfache für 30 und 42 zu bekommen. Dieselbe Zahl erhalte ich, wenn zerlegt wird:

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 5 . \not{6} \\ 42 = 7 . 6 \end{array}\right\} 5 . 7 . 6 = 210$$

Sollen nun folgende Brüche zusammengezählt werden: $\frac{25}{36} + \frac{13}{15} + \frac{4}{11} + \frac{2}{105} + \frac{1}{3}$, so schreibe man in senkrechter Reihe die Nennerzahlen unter einander und ermittele für sie das kleinste Vielfache durch Zerlegung in die Faktoren.

$$3 \left\{ \begin{array}{rcl} 36 & = & 12 . 3 \\ 15 & = & 5 . \not{3} \\ 11 & = & 11 \\ 105 & = & 35 . \not{3} \\ 3 & = & \not{1} . \not{3} \end{array} \right.$$

Da die 3 in 36 als Faktor auch in 15, 105 und 3 enthalten ist, können wir letztere streichen, und haben bloß zu multipliziren 12 . 3 . 5 . 35 . 11. Nun aber ergiebt sich wieder für 5 und 35 der gemeinschaftliche Faktor 5 (5 geht schon in 35 auf und braucht nicht mit 35 multiplizirt zu werden).

$$5 \left\{ \begin{array}{l} 36 = 12 \;.\; 3 \\ 15 = 3 = 1 \;.\; 3 \\ 11 = 11 \\ 105 = 35 = 7 \;.\; 5 \\ 3 = 1 \end{array} \right.$$

und es bleibt also bloß noch zu multipliziren 12 . 3 . 11 . 7 . 5. Dasselbe Verfahren stellt sich kürzer also dar:

3	~~36~~, ~~15~~, 11, 105, 3
5	12, ~~5~~, 11, 35, 1,
	12, 1, 11, 7.

Um bei größeren Zahlen schnell zu erkennen, mit welcher kleinsten sie ohne Rest sich theilen lassen, merke man:

1) Alle Zahlen, die mit einer 0 endigen, sind durch 2 und 5 theilbar, denn da 10 = 2 . 5, so sind beide Faktoren auch in jedem Vielfachen der 10 enthalten.

2) Alle Zahlen, die mit einer 0 oder 5 endigen, sind durch 5 theilbar, denn 5 geht in jedem Zehner und in sich selber auf.

3) Alle Zahlen, die mit einer 2, 4, 6 oder 8 sich endigen, sind durch 2 theilbar, weil alle Zehner durch 2 theilbar sind und jene Einer ebenfalls.

4) Alle Zahlen sind durch 3 theilbar, deren Ziffersumme durch 3 theilbar ist, z. B. 4365 hat zur Ziffersumme 18, ist also durch 3 theilbar, weil es die 18 ist. Denn 10 = 3 . 3 + 1, 100 = 3 . 33 + 1, 1000 = 3 . 333 + 1 u. s. f. Jeder Zehner, Hunderter &c. durch 3 getheilt, gibt 1 zum Rest. Da nun so viele Einheiten zum Reste bleiben, als Zehner, Hunderter &c. da sind, so braucht man die Menge jener Einheiten nur zusammenzuzählen, um die Theilbarkeit zu erfahren. Ist 100 = 3 . 33 + 1, so ist 500 = 5 . [(3 . 33) + 1] = (5 . 99) + 5; ist 10 = 3 . 3 + 1, so ist 70 = 7 . 3 . 3 + 1 = (7 . 9) + 7 &c.

5) Alle Zahlen sind ohne Rest durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffersumme durch 9 theilbar ist. Denn 10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1. Die zu addirenden Einer richten sich nach der Menge der Tausender, Zehner, Hunderter &c.

6) Alle Zahlen sind ohne Rest durch 6 theilbar, wenn sie durch 2 und 3 theilbar sind.

7) Alle Zahlen sind ohne Rest durch 8 theilbar, wenn die letzten 3 Ziffern durch 8 theilbar sind, z. B. 856224 = 856000 + 224 . $\frac{1000}{8} = 125$, also auch jedes Vielfache; $\frac{224}{8} = 28$, folglich &c.

Ich empfehle als Uebung das Zerlegen größerer Zahlen in ihre kleinsten Faktoren,*) z. B.

9680	2
4840	2
2420	2
1210	2
605	5
121	11
11	11

9680 = 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 11 . 11.

2 : 9680 = 4840; 4840 = 2 . 2420.
2 : 4840 = 2420; 2420 = 2 . 1210.
2 : 2420 = 1210; 1210 = 2 . 605.
5 : 1210 = 605; 605 = 5 . 121.
11 : 605 = 11; 121 = 11 . 11.

Wären die Nenner 56, 80, 72, 126 gegeben, so könnte man diese Zahlen zerlegen:

56	2
28	2
14	2
7	7

56 = 2.2.2.7.

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5

80 = 2.2.2.2.5.

72	2
36	2
18	2
9	3
5	3

72 = 2.2.2.3.3.

126	2
63	3
21	3
7	7

126 = 2.3.3.7.

2 . 2 . 2 . 7
2 . 2 . 2 . 2 . 5
2 . 2 . 2 . 3 . 3
2 . 3 . 3 . 7

Da die 2 . 2 . 2 der 56 schon in 80 stecken und auch in 72, können von beiden Zahlen diese Faktoren gestrichen werden. Da der Faktor 2 von der 80 in 126 steckt, kann auch dort die 2 gestrichen werden 2c. und es bleibt also:

2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 = 5040.

8	56	80	72	126
9	7	10	9	126
7	7	10	1	14
	1	10		2

Da nun 8 = 2 . 2 . 2
9 = 3 . 3
10 = 2 . 5,
so kommen die obigen Faktoren 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7.

*) Sehr brav ist auf diesen Punkt Rücksicht genommen in dem „Rationellen Rechenbuche für den Gewerbs- und Handelsstand" von Karl Winternitz. (Preßburg 1851.)

Wir haben dies Letztere nur wegen der Allseitigkeit der Anschauung mitgetheilt, die Hauptsache bleibt das sichere und wohlverstandene Suchen des Hauptnenners in der angegebenen einfachen Weise.

4. Zahlenverhältnisse in Bruchform.

In welchem Verhältnisse stehen die Zahlen 5 und 9?*)

Will ich das Verhältniß zweier Zahlen ausdrücken, so muß ich sie mit einander messen und zwar mit einerlei Maaß. 5 und 9 haben aber kein anderes gemeinschaftliches Maaß, als die 1. Ist nun $5 = 5 \times 1$, so ist $1 = \frac{1}{5} \times 5$ (1mal der 5te Theil von 5) in Bezug auf die 5, und $\frac{1}{9} \times 9$ in Bezug auf die 9. Deshalb ist aber die 9 im Verhältniß zur 5 neunmal der fünfte Theil von 5, und 5 ist 5mal der neunte Theil von 9.

5 und 9.

$5 = 5 \times 1$	$9 = 9 \times 1$
$1 = \frac{1}{5} \times 5$	$1 = \frac{1}{9} \times 9$

folglich

$5 = \frac{5}{9} \times 9$ und
$9 = \frac{9}{5} \times 5.$

So ist das Verhältniß von 3 und 4:

$3 = \frac{3}{4} \times 4,$
$4 = \frac{4}{3} \times 3.$

Lege ich bei den Zahlen 3 und 9 die 1 als Maaßstab an, so sage ich $3 = \frac{3}{9} \times 9$, $9 = \frac{9}{3} \times 3$; lege ich die 3 als Maaßstab an, heißt es:

$3 = \frac{1}{3} \times 9,$
$9 = 3 \times 3.$

Anwendung:

5 Ellen kosten 4 Gulden, was 9 Ellen?

Aufl. Da 9 Ellen $= \frac{9}{5} \times 5$ Ellen, so kosten sie auch $\frac{9}{5} \times 4$ Gulden $= 4 \times \frac{9}{5}$ Gulden $= \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ Gulden.

Da jeder Bruch ein Divisions-Exempel ist ($\frac{7}{8}$ heißt 8 sollen sich in 7 theilen) und jede Proportions-Aufgabe auf einen Divisor und einen Dividendus hinausläuft: so kann man füglich solche Aufgaben in Bruchform ausdrücken, und ich rathe dazu, wenn ich auch nicht die pedantische Ausführlichkeit und Konsequenz unsers Scholz adoptiren möchte. Aber diese Bruchform hat unbestreitbar den Vorzug, daß sie die Genesis und Art der Lösung des Exempels dem Schüler am anschaulichsten vorstellt.

5 Ellen kosten 4 Gulden, was 9 Ellen?

Aufl. Angenommen, 1 Elle kostete 4 Gulden, so werden 9 Ellen 9×4 Gulden werth sein.

$9 \times 4.$

Da aber nicht 1 Elle, sondern 5 Ellen 4 Gulden kosten, muß der Preis 5mal billiger werden, also

$$\frac{9 \times 4}{5} \text{ Gulden} = \frac{36}{5} = 7\tfrac{1}{5} \text{ Gulden}$$

betragen.

*) Weitere Ausführung des schon Geübten.

5 Pferde reichen mit ihrem Vorrath Heu 4 Tage, wie lange reichen mit demselben Vorrath 9 Pferde?

Aufl. Angenommen, 1 Pferd reichte mit dem Heu 4 Tage, so würden 9 Pferde nur $\frac{4}{9}$ Tage reichen. Da aber 5 Pferde mit jenem Vorrath auskommen, können auch die 9 Pferde 5mal länger reichen, also

$$5 \times \tfrac{4}{9} \text{ Tage} = \frac{5 \times 4}{9} = \tfrac{20}{9} = 2\tfrac{2}{9} \text{ Tage.}$$

$3\frac{3}{4}$ Scheffel Roggen werden mit 5 Thalern bezahlt, was kosten bei diesem Preise 4 Scheffel?

Aufl. $\frac{4 \times 5}{3\frac{3}{4}}$ Thaler $= \frac{20}{\frac{15}{4}} = \frac{4 \times 20}{15} = \frac{80}{15} = 5\frac{1}{3}$ Thlr.

4 Scheffel kosten 5 Thaler, was $3\frac{3}{4}$ Scheffel?

Aufl. $\frac{5 \times 3\frac{3}{4}}{4} = \frac{5 \times \frac{15}{4}}{4} = \frac{5 \times 15}{4 \times 4} = \frac{75}{16} = 4\frac{11}{16}$ Thaler.

Diese Form übt nicht minder im Denken als der Proportionsansatz, und ist doch viel elementarischer.

Die Elementarschule hat genug geleistet, wenn sie ihre Schüler dahin bringt, einfache Exempel aus dem Leben schnell und sicher entweder durch Zurückführen auf die Einheit oder durch die Bruchform oder eine Verhältnißgleichung zu lösen, und zwar mit selbständiger Beobachtung, welche Form der Lösung der jedesmaligen Aufgabe am meisten zusagt. So würde ein Schüler, dem nach unserem Gange die Zahl 95 als 5×19 vor der Seele steht, bei einem Exempel wie: $6\frac{1}{3}$ Pfund einer Waare kosten 20 Thaler, was 95 Pfund? die Lösung also anpacken:

$6\frac{1}{3} = \frac{19}{3}$. Da $95 = 5 \times 19$, so sind 95 Pfund = 15 mal $\frac{19}{3}$ Pfund, kosten also 15mal 20 Thaler = 300 Thaler.

Beim Zurückführen auf die Einheit halte man auf senkrechte Reihen und möglichste Kürze.

$6\frac{1}{3}$ Pfd.	20 Thlr.
$\frac{1}{3}$ Pfd.	$\frac{20}{19}$ Thlr.
1 Pfd.	$\frac{60}{19} = 3\frac{3}{19}$ Thlr.
95 Pfd.	285 + 15 = 300 Thlr.

Man nehme immer zuerst *eine* Art der Auflösung, und bringe diese an vielen Beispielen zur Fertigkeit; dann aber nehme man einen Abschnitt des Exempelbuches vor, und stelle einen Wettkampf unter den kleinen Rechnern an, wer zuerst die dem individuellen Beispiel *angemessenste Lösung* findet. Das übt im Beobachten und macht selbständig.

Ist nun der Lehrer bis hierher treu unserem Gange gefolgt, so nehme er ein *praktisches* Rechenbuch, ich meine ein methodisch tüchtiges Exempelbuch zur Hand*), und seine Schüler werden schnell und

*) Ich mache noch besonders aufmerksam auf die Aufgabensammlungen von E. Hentschel, A. Böhme, W. Adam und J. Menzel. Sehr bildend für den Lehrer ist von letzterem das Bruchrechnen „in seiner durch die Maaß- und Gewichtsordnung bedingten Umwandlung" behandelt.

sicher von Anfang bis zu Ende die Aufgaben lösen. Weil nach unserem Lehrgange der Lehrer selber zur Selbständigkeit gelangen muß, bedarf er keiner langen und breiten theoretischen Anweisungen und Handbücher. Uebrigens möge er nicht glauben, alle Aufgaben des Exempelbuchs durchpeitschen zu müssen. Wo ein beobachtendes Anschauen gewonnen ist, bedarf es selbst für die Fertigkeit nicht einer großen Masse von Exempeln. **Nicht vielerlei, sondern viel!**

Verbesserungen.

Seite 8 Zeile 8 von unten lies: das (statt „was").
Seite 16 Zeile 1 von unten lies: Haesters (statt „Hansters").
Seite 36 Zeile 26 von oben lies: 3 Liter (statt „1 Schoppen").
Seite 57 Zeile 15 von unten lies: gleich dem Fünffachen welcher Zahl?
Seite 58 Zeile 8 von unten lies: Dekameter (statt „Dekagramm").
Seite 68 Zeile 24 von oben lies: 3 × 29 (statt „4 × 16").

mb

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

